
colorchecker CLASSIC
x·rite
mm



Louis Couturat.

—

Cours de M. Tannery.

École Normale.

1890–1891.

Papeterie Générale des Écoles, 80, Boul. St-Germain

Cours de M. Tannery
École Normale : 1e année (Sciences)
1890 – 1891.
1er cahier



Table

Alafin, Eléments de Géométrie analytique

1r leçon

Changements de variables.

Soit la fonction ~~implicite~~ de x et de y :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right)$$

On peut avoir besoin de changer soit les 2 variables, soit la variable indépendante. Soit par ex. à remplacer x par t :

$$x = \varphi(t)$$

y deviendra alors une fonction implicite de ~~x~~. ~~F~~

F deviendra une fonction de y, de t, et des dérivés de y par rapport à t.

Pour trouver les formules de transformation, il suffit d'appliquer le théorème des fonctions de fonctions.

Si dans y on remplace x par $\varphi(t)$, y devient fonction de t ; y redeviendra fonction de x si l'on remplace t par sa valeur, ~~tro~~ en fonction de x, trouvée en résolvant l'éq :

$$x = \varphi(t)$$

par rapport à t. Donc y est fonction de fonction de x

Nous cherchons à exprimer les dérivées successives $\frac{dy}{dx}$ ....

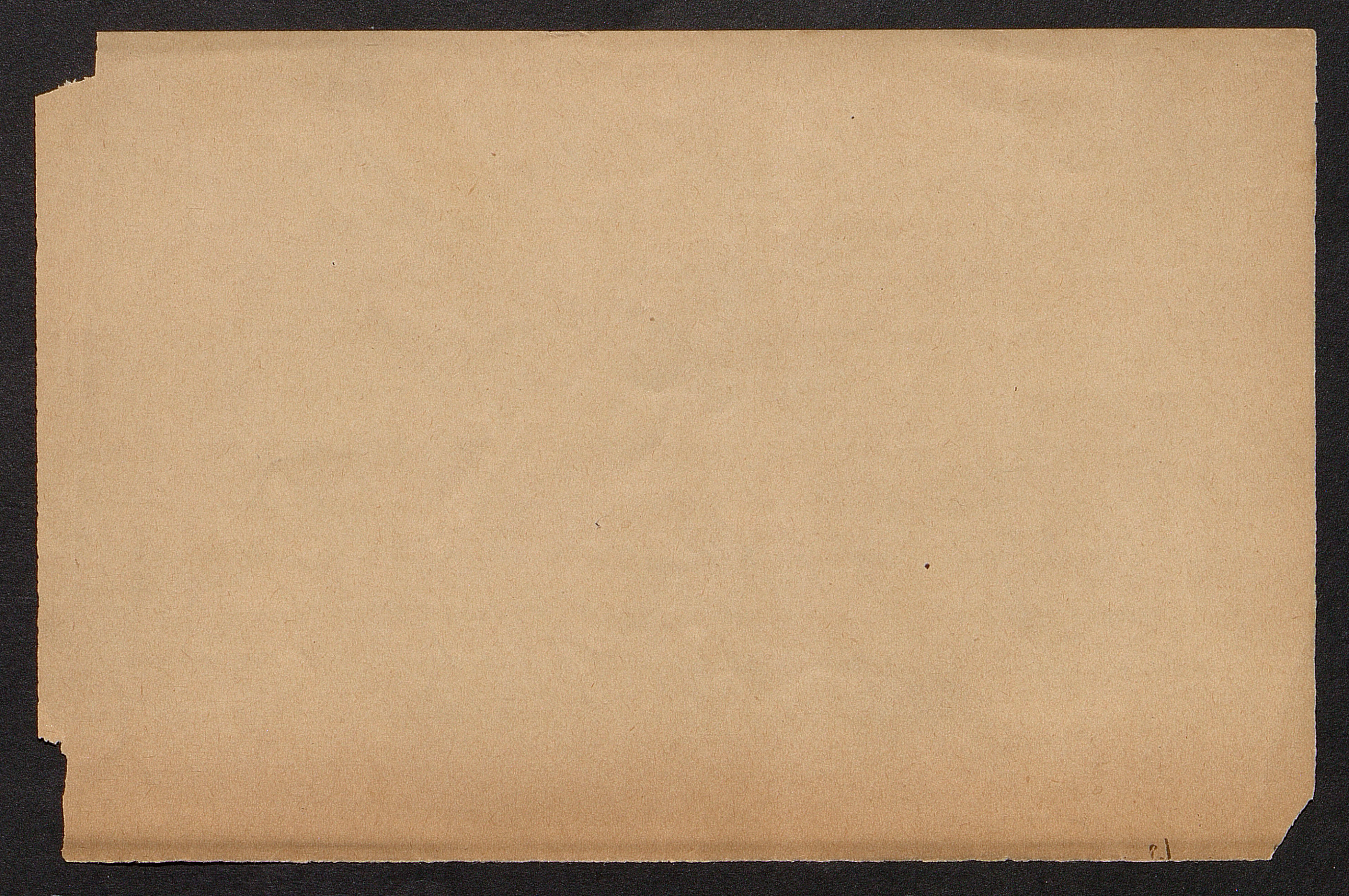
en fonction des dérivées nouvelles $\frac{dy}{dt}$ ......

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

Pour avoir la dérivée de t par rapport à x, prenons les dérivées de l'éq : $x = \varphi(t)$ par rapp à x.

A

Etudier variation trapèze inscrit ds demi-cercle $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ –
Etudier variation surf. tot. cône circ dr. inscrit ds sphère $h = R$.
Et. var. vol ppp. rect. base q. dt surf tot est donnée $x = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$
Et. var. vol. niche de surf. donnée. $x = a$ – $y = 0$.
Une lumière se meut suiv. dr. vert. Et. var. quant. lum. sur élém. horiz.
Une lumière se meut suiv. circ Et. var. quant. lum. sur élém. dans fixe
Sur faces cube 6 pyr. rég. de même hauteur, Et var. solide, surf tot. et. donnée.
Sur faces tétr. rég. 4 pyr. rég. Et. var. vol. du solide, surf. tot. étant donnée.
Cyl. de rayon donné terminé par 2 cônes égaux. Et. var. vol. surf. tot. ét. donnée
Et. var. surf. segm. de cercle dt l'arc a long. donnée. $l = \pi R$. $x = \frac{a^2}{R}$. pas de cône. $\alpha = \frac{\pi}{a}$.
Triangle formé par 3 arcs de cercle égaux de long. donnée; Et. var. surf.
Polyg. rég. formé par n arcs de c. égaux de long. donnée; Et var. surf.



$$1 = \varphi'(t)\frac{dt}{dx} \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)} = \psi(t)$$. Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\psi(t)$$

Prenons la dérivée seconde par rapport à x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{d^2y}{dt^2}\psi(t) + \frac{dy}{dt}\psi'(t)\right]\psi(t)$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2}\psi^2(t) + \frac{dy}{dt}\psi(t)\psi'(t)$$ puis la dérivée 3e :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left[\frac{d^3y}{dt^3}\psi^2(t) + 2\psi(t)\psi'(t)\frac{d^2y}{dt^2} + \psi(t)\psi'(t)\frac{d^2y}{dt^2} + \left[\psi\psi'' + \psi'^2\right]\frac{dy}{dt}\right]\psi(t)$$

$$= \psi^3(t)\frac{d^3y}{dt^3} + 3\psi^2(t)\psi'(t)\frac{d^2y}{dt^2} + \psi(\psi\psi'' + \psi'^2)\frac{dy}{dt}$$

Pour calculer $\frac{d^ny}{dx^n}$, on aura semblablement :

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \psi^n\frac{d^ny}{dt^n} + A_n\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + B_n\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \dots\dots\dots$$

Exercices — On peut calculer A_n, B_n, etc.

On peut calculer φ de manière à rendre $B_n = 0$: on obtient une équation différentielle.

Cas où $x = Lt$. On aurait :

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \alpha_1 t\frac{dy}{dt} + \alpha_2 t^2\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_3 t^3\frac{d^3y}{dt^3} + \dots\dots + \alpha_n t^n\frac{d^ny}{dt^n}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots\dots \alpha_n$ étant des nombres.

— Application — Soit l'équation :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

On veut y changer x en $\cos t$. $x = \cos t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \qquad \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin t}\times\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[-\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t}\cdot\frac{dy}{dt}\right]\frac{-1}{\sin t}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Portons ces expressions dans l'équation, nous avons :

$1-x^2 = \sin^2 t$ $$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\cos t}{\sin t}\cdot\frac{dy}{dt} + n^2y = 0$$

ou : $$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0.$$

Pour trouver toutes les fonctions y satisfaisant ~~cette équation~~, multiplions par $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot n^2y = 0$$

$\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$ est la demi-dérivée de $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$; $\frac{dy}{dt}\cdot n^2y$ est la demi-dérivée de n^2y^2. On a donc ~~(ce sont des constantes)~~ :

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + n^2y^2 = A \qquad \frac{dy}{dt} = \sqrt{A - n^2y^2}$$

ce qui indique qu'il faut trouver une fonction y de t telle que sa dérivée soit égale au radical ; mais on cherche t ; donc sa dérivée par rapport ~~doit~~ à y doit être l'inverse du radical :

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{\sqrt{A-n^2y^2}}$$ Solution : $$t = \int\frac{dy}{\sqrt{A-n^2y^2}}$$

Or $\frac{dt}{dy}$ doit être de la forme : $\frac{1}{\sqrt{A}\sqrt{1-\left(\frac{ny}{\sqrt{A}}\right)^2}}$

alors y est de la forme : $y = A\cos nt + B\sin nt$

L'éq. proposée aurait donc pour solution :

$$y = A\cos(n \operatorname{arc}\cos x) + B\sin(n \operatorname{arc}\cos x)$$

Revenons à la fonction : $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots\dots \frac{d^ny}{dx^n}\right)$

On peut préparer cette expression de manière à laisser la variable indépendante facultative. Dire que y est fonction de x, c'est dire que x et y sont fonctions de t. Soit :

$$\begin{cases} y = f(t) & x = \varphi(t) \end{cases}$$

on aura y en fonction de x en ~~éliminant~~ tirant t de la 2e éq. et en portant son expression en fonction de x dans la 1e équation.

On peut s'arranger de façon à remplacer dans l'expression F les dérivées de y par rapport à x par les dérivées de y par rapport à t, les relations qui lient t à y et x étant telles qu'en éliminant t on ait la relation directe de y à x.

Nous allons appliquer le théorème des fonctions de fonctions, en désignant par les lettres accentuées les dérivées par rapp à t.

Prenons les dérivées des 2 éq. par rapport à x :

$$\frac{dy}{dx} = f'(t)\frac{dt}{dx} \qquad 1 = \varphi'(t)\frac{dt}{dx}$$

Divisons membre à membre $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{x'}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'}{x'}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = (x'y''' - y'x''')x'^{-4} - 3(x'y'' - y'x'')x'^{-5}x''$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'(x'y'''-y'x''') - 3x''(x'y''-y'x'')}{x'^5}$$

Il suffit de substituer ces valeurs dans F pour avoir la fonction transformée.

Pour retrouver la fonction primitive, il suffit de supposer $x = t$; on aurait alors $x' = 1$, $x'' = x''' = \dots = 0$.
et : $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$, etc.

— Dans un autre cas, on peut vouloir échanger la fonction implicite et la variable indépendante : par ex. prendre y pour variable indépendante et x comme fonction de y.
Il suffit de faire $y = t$, $y' = 1$, $y'' = y''' = \dots = 0$.
On a alors : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x''}{x'^3}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-x'x''' + 3x''^2}{x'^5}$, etc.
L'expression transformée de F devient :

$$F\left(x, y, \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}, \frac{-\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^3x}{dy^3} + 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}, \text{etc.}\right)$$

— On peut encore vouloir changer les 2 variables x et y en 2 autres ξ et η, liées aux premières par les équations :

$$\left\{ x = \varphi(\xi, \eta) \qquad y = \psi(\xi, \eta). \right.$$

Dire que y est fonction de x, c'est dire que η est f. de ξ.
Si la relation entre x et y était donnée, on aurait la relation entre ξ et η en éliminant x et y entre les 3 équations.

Inversement, si ξ est fonction de η, y est fonction de x ; car alors x et y sont 2 fonctions de η, et il suffit d'éliminer η entre les 2 équations.

Plus généralement encore, on peut supposer que x, y, ξ, η sont fonctions d'une variable quelconque t. Ces fonctions sont telles qu'en remplaçant x, y, ξ, η par leurs expressions en t on aurait une identité.

Admettons qu'on ait préparé l'expression de F de façon qu'elle ne contienne plus que des dérivées par rapp. à t :

$$F(x, y, x', y', x'', y'', \ldots\ldots\ldots x^n, y^n)$$

On pourra remplacer ces dérivées par ξ, η et leurs dérivées par rapport à t : on a en effet :

$$x' = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\eta' \qquad y' = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\eta'$$

$$x'' = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\xi' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}\eta'\right)\xi' + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}\xi' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\eta'\right)\eta' + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\xi'' + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\eta''$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\xi'^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta}\xi'\eta' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\eta'^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\xi'' + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\eta''$$

$$y'' = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\xi' + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}\eta'\right)\xi' + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}\xi' + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\eta'\right)\eta' + \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\xi'' + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\eta''$$

$$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\xi'^2 + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}\xi'\eta' + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\eta'^2 + \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\xi'' + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\eta'' \quad \text{etc.}$$

La transformée ne contient plus que des dérivées par rapport à ξ, η et t. Si l'on veut que ξ devienne variable indépendante on fera $\xi = t$, $\xi' = 1$, $\xi'' = \xi''' = \ldots\ldots = 0$.

On peut ~~supposer~~ aussi supposer les éq. résolues non plus par rapp. à x et y, mais par rapport à ξ et η :

$$\left\{ \xi = \Phi(x,y) \qquad \eta = \Psi(x,y) \right.$$

Tirons-en les dérivées par rapport à t :

$$\left\{ \xi' = \frac{\partial \Phi}{\partial x}x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y}y' \qquad \eta' = \frac{\partial \Psi}{\partial x}x' + \frac{\partial \Psi}{\partial y}y' \right.$$

On résoudra ces 2 éq. par rapp. à x', y', qu'on aura en f. de ξ' et η'. De même pour les dériv. es secondes :

$$\left\{ \begin{aligned} \xi'' &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}x'^2 + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}x'y' + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x}x'' + \frac{\partial \Phi}{\partial y}y'' \\ \eta'' &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}x'^2 + 2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}x'y' + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x}x'' + \frac{\partial \Psi}{\partial y}y'' \end{aligned} \right.$$

On en tirerait x'' et y'' en fonction de ξ'', η'', x', y'.

— Il peut se faire qu'on n'ait pas préparé l'expression F de manière à rendre la variable indépendante arbitraire ; et que l'on veuille avoir dans la transformée ξ variable indépendante et η fonction de ξ. x et y sont alors aussi fonctions de ξ. Or de la 1e éq. on peut tirer ξ en fonction de x (puisque η est f. de ξ) ~~et de la 2e~~ Si l'on substitue cette valeur dans la 1e éq. elle devient une identité ; si on la substitue dans la 2e, elle donne y en fonction de x.

Prenons les dérivées de ces 2 éq. dans l'hypothèse de x variable indépendante :

$$\left\{ 1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx}\right.$$

Divisons membre à membre :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}}{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right) - I}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} \times \frac{d\xi}{dx}$$

$$I = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)$$

— Exemple pris dans la théorie des courbures.

Définition du rayon et du centre de courbure d'une courbe plane.
Soit une courbe rapportée à 2 axes rectangulaires Ox, Oy, et tangente en O à l'axe des x. Cherchons son rayon de courbure en O ; nous obtiendrons ensuite l'expression générale de ce rayon par un changement de coordonnées.

Soit l'éq. de la courbe :

$$y = \varphi(x)$$

La dérivée $y' = 0$ pour $x = 0$. Le coefficient angulaire de la normale est : $-\frac{1}{y'}$.

Son équation est : $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$

On obtient le point où elle rencontre l'axe des y en faisant $X = 0$:

$$Y = y + \frac{x}{y'}$$

Lorsque x tend vers 0, y tend vers 0, et $\frac{x}{y'}$ tend vers $\frac{1}{y''}$. Donc, pour $X = 0$, on a : $Y = \frac{1}{y''}$

Ce sont les coordonnées du centre de courbure M_0.

Soit maintenant une courbe plane rapportée à des coordonnées rectangulaires quelconques, et soient ses deux équations :

$$\left\{ x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t) \right.$$

Prenons la tangente au point t_0 ou C. Menons CX tang. et CY normale qui serviront de nouveaux axes, et de manière que le sens de la progression sur la courbe soit le même (suivant les valeurs croissantes de t.)

Les formules de transformation sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + X\cos\alpha_0 - Y\sin\alpha_0 \\ y = y_0 + X\sin\alpha_0 + Y\cos\alpha_0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = (x - x_0)\cos\alpha_0 + (y - y_0)\sin\alpha_0 \\ Y = -(x - x_0)\sin\alpha_0 + (y - y_0)\cos\alpha_0 \end{array} \right.$$

x et y sont fonctions de t : par ces formules, X et Y deviennent fonctions de t. Y devient fonction de X si l'on élimine t entre les 2 dernières formules.

Le centre de courbure K aura pour ordonnées : $X=0$, $Y = \frac{1}{\frac{d^2Y}{dX^2}}$.

Y est en même temps le rayon de courbure.

Pour avoir les coordonnées du centre de courbure, il n'y a plus qu'à calculer les dérivées de Y par rapport à X.

Nous regarderons Y comme une fonction de X obtenue en éliminant t entre les 2 dernières éq (x et y sont f. dét.)

Nous avons t en fonction de X en résolvant la 1e éq. par rapp. à t ; si nous remplaçons t par cette valeur, la 1e éq. devient une identité, la 2e donne Y en fonction de X.

Prenons les dérivées dans cette supposition (X var. indép.)

(x', y', dérivées par rapp. à t.)

$$1 = (x'\cos\alpha_0 + y'\sin\alpha_0)\frac{dt}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX} = (-x'\sin\alpha_0 + y'\cos\alpha_0)\frac{dt}{dX}$$

Divisons membre à membre

$$\frac{dY}{dX} = \frac{y'\cos\alpha_0 - x'\sin\alpha_0}{y'\sin\alpha_0 + x'\cos\alpha_0}$$

[On sait que, α étant l'angle de l'axe Ox et ~~x, y étant les coordonnées~~ de la tangente, on a les formules :
$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$, $\sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$

Faisons $t=t_0$, ou $X=0$.

Dans ce cas, le numérateur $(y'\cos\alpha_0 - x'\sin\alpha_0)$ est nul.

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{\cancel{x'\cos}\,(y'\sin\alpha_0 + x'\cos\alpha_0)(y''\cos\alpha_0 - x''\sin\alpha_0)}{(y'\sin\alpha_0 + x'\cos\alpha_0)^2} \times \frac{dt}{dX}$$

$$= \frac{y''\cos\alpha_0 - x''\sin\alpha_0}{y'\sin\alpha_0 + x'\cos\alpha_0} \times \frac{dt}{dX}$$

Remplaçons $\sin\alpha_0$ et $\cos\alpha_0$ par leurs expressions en fonction de x', y' :

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{y_0''x_0' - x_0''y_0'}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}} : \left(x_0'^2 + y_0'^2\right) = \frac{y_0''x_0' - x_0''y_0'}{\left(x_0'^2 + y_0'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Le rayon de courbure est l'inverse de cette expression :

$$\left\{ Y_0 = R = \frac{\left(x_0'^2 + y_0'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y_0''x_0' - x_0''y_0'} \qquad X_0 = 0.\right.$$

On a donc enfin pour les deux coordonnées du centre K :

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{\left(x_0'^2 + y_0'^2\right) y_0'}{y_0''x_0' - y_0'x_0''} \\ y &= y_0 + \frac{\left(x_0'^2 + y_0'^2\right) x_0'}{x_0'y_0'' - y_0'x_0''} \end{aligned}\right.$$

Exercices – L'expression du rayon de courbure étant :

$$R = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}$$

Si x est variable indépendante, on fera $x' = 1$, $x'' = x''' = \dots = 0$, et la formule devient :

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Le dénominateur devenant nul aux points d'inflexion, le R de courbure est infini pour ces mêmes points.
Pour que la seconde dérivée fût constamment nulle, il faudrait que la 1re fût constante ; c'est le cas d'une fonction linéaire ; la courbe serait une droite

Considérons une surface et le plan tangent en M. Coupons la surface par un plan passant par le p. M ; la section est une courbe plane tangente en M à l'intersection du plan tangent et du plan sécant. Proposons-nous d'étudier les variations de la courbure de cette section pour les différents plans passant en M. C'est la 1e partie de l'étude de la courbure des surfaces (Euler)

— Section normale, sections obliques —
On va voir que le rayon de courbure des sections obliques se déduit du rayon de courbure de la section normale.

M

z
Y
θ
x
O
y

Prenons pour origine le p. de contact O, pour plan des x, y le plan tangent ; l'axe des z est la normale. Menons le plan sécant oblique par l'axe des x ; il coupe le plan des y, z suivant OY qui fait avec la normale Oz un angle θ.

Si l'éq. de la surface est : $z = f(x, y)$
on peut avoir l'éq. de la section, rapportée aux axes Ox, OY, ~~en fonction de x, y, z~~ il suffira de faire :

$$\begin{cases} y = Y \sin\theta & z = Y\cos\theta \end{cases}$$

Pour avoir le rayon de courbure, on formera l'expression :

$$\frac{1}{\frac{d^2Y}{dx^2}} \quad \text{pour} \quad x=0.$$

Y étant une fonction de x définie par l'éq :

$$Y\cos\theta = f(x, Y\sin\theta) \qquad \text{éq. transformée de la courbe}$$

Le centre de courbure sera évidemment sur OY.

— On peut aussi considérer Y comme définie par les 3 éq :

$$\left\{ z = f(x, y) \qquad y = Y\sin\theta \qquad z = Y\cos\theta \right.$$

On résoudra ces éq. par rapp. à Y, y, z, qu'on aura en fonction de x.

$$\left\{ \frac{dz}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx}\sin\theta \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dY}{dx}\cos\theta \right.$$

Comme la surface passe par l'origine, z est nul pour $x=y=0$.

L'équation du plan tangent est :

$$Z - z = \frac{df}{dx}(X-x) + \frac{df}{dy}(Y-y)$$

Si $z=0$, on doit avoir : $\frac{df}{dx}=0$, $\frac{df}{dy}=0$.

Mais alors $\frac{dz}{dx}$ est nulle, et en vertu de la 3e éq. $\frac{dY}{dx}=0$.

Donc la courbe est tangente à Ox en O.

Prenons les dérivées secondes :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2z}{dx^2} &= \frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2Y}{dx^2}\sin\theta \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= \frac{d^2Y}{dx^2}\cos\theta \end{aligned} \right.$$

On peut donc calculer les dérivées secondes par des éq. du 1er degré.
On a pour le point de contact $x = y = 0$, et $\frac{dY}{dx} = \frac{dy}{dx} = 0$.
Alors on a : $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et :

$\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ L'inverse est le rayon de courbure

$$R = \frac{\cos\theta}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

Si l'on veut avoir le rayon de courbure de la section normale on fait $\theta = 0$:

$$R = \frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

On voit que le rayon de courbure d'une section oblique est égal au rayon de ~~...~~ la section normale multiplié par $\cos\theta$; c.à.d. qu'il est la projection sur OY (ou sur le plan sécant) du rayon de la section normale qui est sur Oz. (Théorème de ~~Bernouille~~ Meunier.) La détermination d'un rayon de courbure quelconque se ramène donc à la connaissance du ray. de courbure d'une section normale.

— Étude de la courbure des sections normales.

Soit l'équation de la surface : $z = f(x, y)$

On pose $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$;

$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Supposons la surface tangente à l'origine au plan des x, y, et coupons-la par un plan passant par Oz, qui coupe le plan

des x, y, suivant OX, qui fait avec Ox l'angle α.
Dans le plan zOX, la courbe plane est rapportée aux 2 axes Oz, OX. Les formules de transformation sont :

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha \qquad y = X\sin\alpha \end{cases}$$

en portant ces valeurs dans l'éq. primitive de la surface

$$z = f(x, y)$$

on a une éq. entre z et X qui donne la section normale.
Le rayon de courbure est la coordonnée z du centre de courbure ; il faut calculer $\frac{d^2z}{dX^2}$ pour $X = 0$ ($x=0$, $y=0$, à l'origine)
On a pour 1e dérivée : $\frac{dz}{dX} = p\cos\alpha + q\sin\alpha$

$$\frac{d^2z}{dX^2} = (r\cos\alpha + s\sin\alpha)\cos\alpha + (s\cos\alpha + t\sin\alpha)\sin\alpha$$

$$R = \frac{1}{\frac{d^2z}{dX^2}} = \frac{1}{r\cos^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + t\sin^2\alpha}$$

Il est facile de voir comment R varie suivant les variations de α.
Son expression est celle du carré du rayon d'une conique dont l'éq. serait : $rx^2 + 2sxy + ty^2 = 1$
Ses variations sont donc celles du rayon d'une conique. On dit, suivant les cas, que le point O est elliptique ou hyperbolique (par rapp. à la courbure de la surface en ce point)

Quand la conique est une hyperbole, R change de signe
$rt - s^2 < 0$
Le rayon de courbure passe d'un côté à l'autre du plan tangent. Pour les directions asymptotiques de l'hyperbole le rayon de courbure devient infini. Ces deux positions s'appellent les directions asymptotiques du point ; la surface y présente une inflexion. Il existe sur ces surfaces des lignes asymptotiques telles qu'en chacun de leurs points la tangente soit une ligne asymptotique.

Le carré du rayon d'une conique passe par des maxima et des minima. Dans une ellipse, les deux max. et les 2 min. sont réels ; ils correspondent aux 2 axes : on a également pour le rayon de courbure des max. et des min. qui déterminent les deux directions principales, rectangulaires. Il existe sur la surface des lignes telles qu'en chacun de leurs points la tangente soit une direction principale de ce point. Il en passe 2 par chaque point de la surface. On les appelle lignes de courbure maxima et minima.

On appelle directions conjuguées de la surface 2 droites telles que les rayons de courbure correspondent à 2 rayons conjugués de la conique. On peut chercher la relation entre les angles de ces directions conjuguées (Théorème d'Apollonius.)

Cherchons maintenant l'expression du rayon de courbure d'une section normale en un point quelconque d'une surface déterminée en fonction de 2 paramètres u et v.

$$\begin{cases} x = f(u,v) \quad y = \varphi(u,v) \quad z = \psi(u,v) \end{cases}$$

A chaque système de valeurs u, v, correspond un point. On considère le plan tangent au point u_0, v_0, et une section normale : nous voulons calculer le rayon de courbure de cette section au point de contact. Pour déterminer une courbe sur la surface, on peut considérer u et v comme fonctions d'un paramètre t ; x, y, z, deviennent fonctions de t. On peut par exemple rendre u f. de v, ou v f. de u. Parmi les courbes déterminées par une relation entre u et v, on doit remarquer celles qu'on obtient en posant u constante et celles qu'on obtient en faisant v constante. Par chaque point passent 2 courbes de ces deux systèmes. Nous supposerons que ces 2 courbes soient distinctes.

Soit une courbe quelconque obtenue en supposant u, v fonctions de t (les dérivées par rapp à t. seront accentuées) :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\partial x}{\partial u} u' + \dfrac{\partial x}{\partial v} v' \\ y' = \dfrac{\partial y}{\partial u} u' + \dfrac{\partial y}{\partial v} v' \\ z' = \dfrac{\partial z}{\partial u} u' + \dfrac{\partial z}{\partial v} v' \end{cases}$$

Les équations de la tangente sont :

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}$$ qui deviennent :

$$\frac{X-x}{\frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v'} = \frac{Y-y}{\frac{\partial y}{\partial u}u' + \frac{\partial y}{\partial v}v'} = \frac{Z-z}{\frac{\partial z}{\partial u}u' + \frac{\partial z}{\partial v}v'}$$

Cette droite est située dans le plan dont l'équation est :

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Donc toutes les tangentes (aux courbes tracées sur la surface et passant par le p. $u\ v$) sont dans ce plan, qui est le pl. tang. en ce point.

On peut avoir les ~~coordonnées~~ paramètres directeurs de la normale :

$$\begin{cases} \xi = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} \\ \eta = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} \\ \zeta = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \end{cases}$$

La direction de la tangente est déterminée par les 3 dérivées x', y', z', exprimées plus haut en fonction de u', v'.

Quand u', v' varient, la tangente tourne dans le pl. tangent.

Remplaçons les ~~paramètres~~ dérivées des param. u', v' par λ et μ. Nous aurons de nouvelles éq. qui définissent toujours une dr. passant par le p. de contact et dans le pl. tangent, c.à.d. la trace d'une section normale sur ce plan.

$$\frac{X-x}{\frac{\partial x}{\partial u}\lambda+\frac{\partial x}{\partial v}\mu}=\frac{Y-y}{\frac{\partial y}{\partial u}\lambda+\frac{\partial y}{\partial v}\mu}=\frac{Z-z}{\frac{\partial z}{\partial u}\lambda+\frac{\partial z}{\partial v}\mu}$$

Le plan de la section normale a pour paramètres λ et μ.
Les cosinus directeurs de ~~la d~~ ce plan tournant autour de la normale seront :

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\lambda+\frac{\partial x}{\partial v}\mu}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\lambda+\frac{\partial x}{\partial v}\mu\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\lambda+\frac{\partial y}{\partial v}\mu\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\lambda+\frac{\partial z}{\partial v}\mu\right)^2}},\ \frac{\frac{\partial y}{\partial u}\lambda+\frac{\partial y}{\partial v}\mu}{\sqrt{(\ )^2+(\ )^2+(\ )^2}},\ \frac{\frac{\partial z}{\partial u}\lambda+\frac{\partial z}{\partial v}\mu}{\sqrt{(\ )^2+(\ )^2+(\ )^2}}$$

Posons, pour abréger

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

On obtient : $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=EG-F^2$ (identité de Lagrange)

Les cosinus directeurs de la tangente seront :

$$\alpha=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\lambda+\frac{\partial x}{\partial v}\mu}{\sqrt{E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2}}$$

$$\beta=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}\lambda+\frac{\partial y}{\partial v}\mu}{\sqrt{E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2}}$$

$$\gamma=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}\lambda+\frac{\partial z}{\partial v}\mu}{\sqrt{E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2}}$$

Rappelons qu'on peut déterminer une courbe sur la surface en établissant une relation entre u et v. Si, en particulier, on fait v constante, les paramètres directeurs de la courbe sont :

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$$

Si au contraire on fait u constante, les paramètres sont :

$$\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$$

Quant aux cosinus directeurs, ils sont respectivement :

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{1}{\sqrt{F}}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{1}{\sqrt{F}}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}, \frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$\frac{F}{\sqrt{EG}}$ ~~est~~ représente le cosinus de l'angle des 2 courbes (de leurs tangentes.)

Les coordonnées d'un p. quelconque du plan tangent sont :

$$\begin{cases} x + \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v} \\ y + \lambda \frac{\partial y}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial v} \\ z + \lambda \frac{\partial z}{\partial u} + \mu \frac{\partial z}{\partial v} \end{cases}$$

Quand on prend pour λ et μ, u' et v' dérivées de u et v, qui sont les paramètres d'une section normale, on a l'intersection du plan normal et du pl tangent, c à d. la tangente à cette section.

~~Pour transformer les coordonnées~~ Les quantités $\lambda\sqrt{E}$, $\mu\sqrt{G}$ peuvent être regardées comme les coordonnées d'un point du plan tangent, rapporté aux tangentes ~~$\lambda\sqrt{E}$~~, ~~$\mu\sqrt{G}$~~. aux 2 courbes u_0, v_0.

Les paramètres de la normale sont ξ, η, ζ.
Les cosinus directeurs de la normale sont alors :

$$\frac{\xi}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \frac{\zeta}{\sqrt{EG-F^2}}$$

que nous appellerons α', β', γ'.
Pour les cosinus directeurs de la tangente, α, β, γ, on a vu plus haut leurs expressions p. 19.

Si l'on prend pour axes la tang. MT et la normale MN, un point sera déterminé par les valeurs particulières u_0, v_0 des paramètres, auxquelles correspondent les coordonnées x_0, y_0, z_0, et toutes les valeurs ~~affectées~~ d'indice 0.
X et Y sont les coordonnées de ce p. dans le plan normal, par rapport aux axes MT, MN.

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_0 X + \alpha'_0 Y = f(u, v) \\ y = y_0 + \beta_0 X + \beta'_0 Y = \varphi(u, v) \\ z = z_0 + \gamma_0 X + \gamma'_0 Y = \psi(u, v) \end{cases}$$

Les secondes équations, entre X, Y, u et v donnent un point de la section normale, et réciproquement, tout point correspond à un système X, Y, u, v.
Si l'on résout ces 3 éq. par rapp. à Y, u, v, on obtient leur valeur en fonction de X : on a précisément l'éq. en X et Y de la section normale.

z N
M x
Y
T

Tout revient à calculer $\frac{d^2Y}{dX^2}$ pour $X=0$, càd ~~aussi~~ pour $u=0$, $v=0$, et aussi pour $Y=0$.

Prenons les dérivées dans le second système des 3 éq :

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha'_0 \frac{dY}{dX} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial X} \\ \beta_0 + \beta'_0 \frac{dY}{dX} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial X} \\ \gamma_0 + \gamma'_0 \frac{dY}{dX} = \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial X} \end{cases}$$

Ces éq du 1er degré donnent $\frac{dY}{dX}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ —

Prenons les dérivées secondes :

$$\alpha'_0 \frac{d^2Y}{dX^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial X}\right)\frac{\partial u}{\partial X} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial X}\right)\frac{\partial v}{\partial X}$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}$$

ou

$$\begin{cases} \alpha'_0 \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial X}\cdot\frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 \\ \qquad + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \end{cases}$$

On aurait de même les expressions de $\beta'_0 \frac{d^2Y}{dX^2}$ et de $\gamma'_0 \frac{d^2Y}{dX^2}$ —

On pourrait résoudre ces 3 éq. en y portant les valeurs des dérivées premières tirées du premier système d'éq.

Mais ces calculs se simplifient parce qu'on ne veut que $\frac{d^2Y}{dX^2}$ dans le cas particulier où $X=0$.

Multiplions le 1er système d'éq. en $\frac{dY}{dX}$, la 1e par α'_0, la 2e par β'_0, la 3e par γ'_0, et faisons la somme membre à membre

~~la som~~ dans le 2e membre, la somme :

$$\alpha'_0 \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dX} + \beta'_0 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dX} + \gamma'_0 \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dX}$$ est nulle,

ainsi que $\alpha'_0 \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dX} + \beta'_0 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dX} + \gamma'_0 \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dX}$.

donc ce second membre est nul. Dans le 1er, ~~les produits~~ la somme

$$\alpha_0 \alpha'_0 + \beta_0 \beta'_0 + \gamma_0 \gamma'_0$$ (cos. de l'angle NMT.)

~~sont~~ est également nulle ; il reste donc :

$$\left(\alpha'^2_0 + \beta'^2_0 + \gamma'^2_0\right) \frac{dY}{dX} = 0 ,$$ c à d $\frac{dY}{dX} = 0$ pour $X = 0$.

Ce résultat était à prévoir, la courbe étant tangente à l'axe des x pour $X = 0$.

On peut écrire le second système d'éq. sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \left[\frac{\lambda}{\sqrt{E_0\lambda^2 + 2F_0\lambda\mu + G_0\mu^2}} - \frac{du}{dX}\right] \frac{\partial f}{\partial u_0} + \left[\frac{\mu}{\sqrt{E_0\lambda^2 + 2F_0\lambda\mu + G_0\mu^2}} - \frac{dv}{dX}\right] \frac{\partial f}{\partial v_0} = 0 \\ \left[\frac{\lambda}{\sqrt{\quad}} - \frac{du}{dX}\right] \frac{\partial \varphi}{\partial u_0} + \left[\frac{\mu}{\sqrt{\quad}} - \frac{dv}{dX}\right] \frac{\partial \varphi}{\partial v_0} = 0 \\ \left[\frac{\lambda}{\sqrt{\quad}} - \frac{du}{dX}\right] \frac{\partial \psi}{\partial u_0} + \left[\frac{\mu}{\sqrt{\quad}} - \frac{dv}{dX}\right] \frac{\partial \psi}{\partial v_0} = 0 \end{cases}$$

Ce sont 3 éq. homogènes du 1er degré par rapport aux 2 quantités entre crochets. Il faut que ces 3 inconnues auxiliaires soient nulles, sauf le cas où ξ, η, ζ seraient nuls à la fois ; mais alors les tang. aux 2 courbes u et v coïncideraient, et ces 2 courbes aussi, hypothèse que nous avons écartée.

24

Puisque les 2 quantités entre crochets sont égales à 0, nous avons les éq :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{du}{dX}\right)_{(X=0)} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2}} \\ \left(\dfrac{dv}{dX}\right)_{(X=0)} = \dfrac{\mu}{\sqrt{E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2}} \end{cases}$$

auxquelles nous ajoutons : $\left(\dfrac{dY}{dX}\right)_{(X=0)} = 0.$

Dans le second système d'éq, en $\dfrac{d^2Y}{dX^2}$, multiplions la 1e par α', la 2e par β', la 3e par γ', et ajoutons-les membre à membre :

$$\alpha_0'^2 \frac{d^2Y}{dX^2} = \alpha' \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dX}\right)^2 + 2\alpha' \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\cdot\frac{du}{dX}\cdot\frac{dv}{dX} + \alpha' \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dX}\right)^2$$
$$+ \alpha' \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dX^2} + \alpha' \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{d^2v}{dX^2}$$

Les formules en β', γ' s'obtiennent en remplaçant dans la 1e f par φ ou ψ.

La somme se simplifie, car la seconde ligne disparait : en effet : $\alpha_0' \dfrac{\partial f}{\partial u} + \beta_0' \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \gamma_0' \dfrac{\partial \psi}{\partial u} = 0$ et aussi :

$$\alpha_0' \frac{\partial f}{\partial v} + \beta_0' \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \gamma_0' \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0.$$

Restent les termes de la première ligne.

Posons : $E' = \xi \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \eta \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \zeta \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$

$$F' = \xi \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \eta \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \zeta \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$$

$$G' = \xi \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \eta \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \zeta \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

On peut exprimer ces 3 quantités sous forme de déterminants :

$$E' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

De même F' et G'.

On a alors :

$$\frac{d^2Y}{dX^2}_{(X=0)} = \frac{E'\lambda^2 + 2F'\lambda\mu + G'\mu^2}{\sqrt{EG-F^2}\left(E_0\lambda^2 + 2F_0\lambda\mu + G_0\mu^2\right)}$$

L'inverse de cette formule est l'expression de R :

$$\frac{R}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}{E'\lambda^2 + 2F'\lambda\mu + G'\mu^2}$$

On peut avoir aussi les coordonnées du centre de courbure :

$$X = 0, \qquad Y = R.$$

Pour les exprimer dans le système x, y, z, on a les formules de transformation : $x_1 = x + \alpha X + \alpha' Y$, etc

qui donnent ici :

$$x_1 = x + \alpha' R$$
$$y_1 = y + \beta' R$$
$$z_1 = z + \gamma' R$$

ou

$$\begin{cases} x_1 = x + \xi \dfrac{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}{E'\lambda^2 + 2F'\lambda\mu + G'\mu^2} \\[2ex] y_1 = y + \eta \dfrac{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}{E'\lambda^2 + 2F'\lambda\mu + G'\mu^2} \\[2ex] z_1 = z + \zeta \dfrac{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}{E'\lambda^2 + 2F'\lambda\mu + G'\mu^2} \end{cases}$$

Ainsi, quand on considère une surface déterminée par 2 param. u et v, le plan tangent au p. (u_0, v_0) une droite de ce plan définie par les paramètres λ, μ, le plan normal mené par cette droite et enfin la section normale dans ce plan, on a par les formules précédentes le centre et le rayon de courbure de la section normale au point (u_0, v_0).

Si l'on fait varier le rapport de λ et μ, on fait varier la section normale au p. (u_0, v_0) et conséquemment le rayon de courbure. La variation du rayon dépend de la fraction du 2e degré :

$$\frac{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}{E'\lambda^2 + 2F'\lambda\mu + G'\mu^2}$$

Le numérateur ne peut s'annuler pour des valeurs réelles de λ, μ, car la quantité $F^2 - EG$ est essentiellement négative p. 19. (comme somme de carrés négative, par l'identité de Lagrange.) Le dénominateur au contraire peut s'annuler : les ~~racines~~ paramètres λ et μ donnent alors une direction asymptotique.

Si l'on donne à λ et μ les valeurs u', v', la droite qu'ils déterminent dans le pl. tang. est la tang. à la courbe que les paramètres u, v définissent sur la surface.

Si l'on a : $E'u'^2 + 2F'u'v' + G'v'^2 = 0$,

cette tangente est une direction asymptotique au p. (u, v)

On peut, pour déterminer le rapport de v' et u', supposer que v est fonction de u ; alors : $v' = \frac{dv}{du}$, $u' = 1$.

La relation précédente devient : $E' + 2F'\frac{dv}{du} + G'\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$

ce qui ~~montre~~ signifie que la courbe définie par $v = f(u)$ est tangente à une direction asymptotique.

Si v est une fonction de u telle que l'éq. précédente soit identiquement satisfaite pour toutes les valeurs de u, elle définit une courbe qui est tangente en chacun de ses points à une direction asymptotique passant par ce point. La relation précédente est donc l'éq. différentielle des lignes asymptotiques.

Les directions principales (bissectrices des angles des dir. asymptotiques) correspondent aux maximums et minimums de R, c.à d. de la fraction du 2e degré en λ et μ. Si l'on cherche ces max. et min. en égalant à 0 la fraction, on aura les valeurs de la fraction, et par suite les valeurs de R maxima et minima. Ce sont les deux rayons de courbure principaux du point. Or l'éq. ainsi obtenue a certainement ses racines réelles

p. 19. car $EG - F^2$ est essentiellement positif. Pour qu'elle les ait égales (condition du max. et du min.) il faut une nouvelle condition qui détermine la valeur du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$.

On peut chercher autrement les valeurs de $\frac{\lambda}{\mu}$ qui correspondent aux max. et min. de R, en égalant à 0 la dérivée de la fraction du 2e degré en λ et μ ; ce qui donne l'éq. :

$$(E\lambda + F\mu)(F'\lambda + G'\mu) - (E'\lambda + F'\mu)(F\lambda + G\mu) = 0$$

ou

$$(EF' - E'F)\lambda^2 + (EG' - E'G)\lambda\mu + (FG' - F'G)\mu^2 = 0$$

qui donne au moyen des 2 racines $\frac{\lambda}{\mu}$, les 2 directions principales.

Si l'on remplace $\frac{\mu}{\lambda}$ par $\frac{dv}{du}$, v étant fonction de u et définissant une courbe sur la surface, cette courbe est tangente à une direction principale à chaque point dont les paramètres u, v satisfont à cette équation. Si tous les points (u, v) satisfont, l'éq.

$$(EF'-E'F)+(EG'-E'G)\frac{dv}{du}+(FG'-F'G)\left(\frac{dv}{du}\right)^2=0$$

est l'éq. différentielle des lignes de courbure. Il reste à savoir (par le calcul intégral) s'il y a une fonction v de u satisfaisant à cette relation.

— Cas particulier où la surface est donnée par l'éq.

$$z=\psi(x,y)$$

On peut considérer x, y comme étant les 2 param. u, v; on retrouve les 3 éq. générales: $\{x=u \quad y=v \quad z=\psi(u,v)$

p, q, r, s, t étant les quantités définies plus haut, on a:

$$\frac{dx}{du}=1, \quad \frac{dx}{dv}=0, \quad \frac{dy}{du}=0, \quad \frac{dy}{dv}=1, \quad \frac{dz}{du}=p, \quad \frac{dz}{dv}=q$$

$$E=1+p^2, \quad F=pq, \quad G=1+q^2.$$

$$\xi=-p, \quad \eta=-q, \quad \zeta=1.$$ (On peut vérifier: $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=EG-F^2$) page 19

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}=0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{dp}{dx}=r, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}=0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}=0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}=s,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=t. \quad E'=r \quad F'=s \quad G'=t.$$

L'expression du rayon de courbure devient dans ce cas:

$$\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{(1+p^2)\lambda^2+2pq\lambda\mu+(1+q^2)\mu^2}{r\lambda^2+2s\lambda\mu+t\mu^2}$$

Pour rappeler la signification géométrique de λ et de μ, introduisons les cosinus directeurs de la direction définie par λ, μ.

On a en général : $\alpha = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial u}\lambda + \frac{\partial f}{\partial v}\mu}{\sqrt{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}}$ et de même β et γ.

Ces formules deviennent ici :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\lambda}{\sqrt{E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2}} \\ \beta = \dfrac{\mu}{\sqrt{E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2}} \end{cases}$$

α et β sont donc proportionnels à λ et μ.

Le 3e cosinus est donné par le plan tangent lui-même :

$$\gamma = p\alpha + q\beta$$

Ainsi les 3 cosinus sont prop. à p, q et -1, càd. à ξ, η, ζ.

On peut donc écrire :

$$\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{(1+p^2)\alpha^2 + 2pq\alpha\beta + (1+q^2)\beta^2}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}$$

On a pour l'équation différentielle des lignes asymptotiques :

$$r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

On aurait de même l'éq. diff. des directions principales, en remplaçant $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\beta}{\alpha}$ par $\frac{dy}{dx}$:

$$(EF' - E'F) + (EG' - E'G)\frac{dy}{dx} + (FG' - F'G)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Autre application du changement de variables.

Trouver les formules pour passer des coordonnées ponctuelles aux coordonnées tangentielles.

Dans le système tangentiel, on regarde une courbe quelconque comme l'enveloppe de ses tangentes, au lieu de la considérer comme l'ensemble de ses points (système ponctuel).

L'équation tangentielle d'une courbe est une équation homogène entre les 3 coefficients d'une droite. Comme il n'y a que 2 coefficients qui soient variables indépendantes, on peut en regarder 2 comme fonction du 3e, ou les considérer tous les trois comme fonctions d'une même variable indépendante ; soit l'équation générale avec 3 paramètres :

$$ux + vy + wz = 0$$

on peut se donner u, v, w en fonction d'un autre paramètre.

Si l'on a une équation ponctuelle entre x et y :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

on peut demander de transformer cette équation en une équation entre les paramètres arbitraires u et v.

Supposons que u, v, w soient fonctions d'un paramètre quelconque. On obtiendra les coordonnées d'un point quelconque de la courbe en cherchant le point où la droite touche son enveloppe (qui est précisément la courbe.)

Soient u', v', w' les dérivées par rapport à v ; posons $z = 1$.

$$\begin{cases} ux + vy + w = 0 \qquad u'x + v'y + w' = 0 \\ \end{cases}$$

sont les 2 équations qui donneront x et y en fonction de t.
Dans l'éq. $F=0$, on peut rendre x et y fonctions d'un paramètre arbitraire en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{y'}{x'}$, etc.
Les 2 éq. précédentes résolues donnent :

$$x = \frac{vw' - wv'}{uv' - vu'} \qquad y = \frac{wu' - uw'}{uv' - vu'}$$

On peut représenter ces valeurs d'une manière plus simple.
Considérons le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix}$$

Posons les mineurs de ce déterminant :

$$\begin{cases} U = v'w'' - w'v'' \\ V = w'u'' - u'w'' \\ W = u'v'' - v'u'' \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 = wv'' - vw'' \\ V_1 = uw'' - wu'' \\ W_1 = vu'' - uv'' \end{cases} \quad \begin{cases} U_2 = vw' - wv' \\ V_2 = wu' - uw' \\ W_2 = uv' - vu' \end{cases}$$

On a pour les coordonnées ~~ponctuelles~~ d'un point quelconque de la courbe : $x = \frac{U_2}{W_2}$ $\quad y = \frac{V_2}{W_2}$

Supposons que l'équation $F=0$ soit préparée de façon à ne plus contenir que les dérivées de x et de y par rapport à un param. t qui est celui qui figure dans l'éq. de la tangente ; on aura pour leurs expressions :

$$\left\{ x' = \frac{W_2 U_2' - U_2 W_2'}{W_2^2} \right. , \qquad y' = \frac{V_2' W_2 - W_2' V_2}{W_2^2}$$

ou bien : $\left\{ x' = \frac{-U_1 W_2 + W_1 U_2}{W_2^2} \right. , \qquad y' = \frac{-V_1 W_2 + W_1 V_2}{W_2^2}$

Or on sait que : $U_2 W_1 - U_1 W_2 = \Delta v$

$V_1 W_2 - W_1 V_2 = \Delta u$. Donc :

$$x' = \frac{\Delta v}{W_2^2} \qquad y' = \frac{-\Delta u}{W_2^2}$$ ce qui donne enfin :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = -\frac{u}{v}.$$

Ce résultat était à prévoir, car ce rapport est le coefficient angulaire de la tangente ; or elle a pour équation :

$$ux + vy + w = 0$$

Nous calculerions de même x'', y'' – Nous pourrons alors chercher l'expression du rayon de courbure

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}$$

On peut aisément calculer le dénominateur : c'est le numérateur de la seconde dérivée de y par rapport à x :

$$\left(\frac{y'}{x'}\right)' = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2} = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{W_2}{v^2}$$ ~~Donc~~

Or : $x'^2 = \dfrac{\Delta^2 v^2}{W_2^4}$ Donc

$$x'y'' - y'x'' = \frac{\Delta^2 W_2 v^2}{W_2^4 v^2} = \frac{\Delta^2}{W_2^3}$$

Le numérateur de R est d'autre part : $\dfrac{\Delta^3 (u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}{W_2^6}$, à diviser par $\dfrac{\Delta^2}{W_2^3}$, ce qui donne enfin :

$$R = \frac{\Delta (u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{W_2^3}$$

Si l'on prend pour variable indépendante un des param. u, v, w, on exprimera les autres en fonction de celui-là.

Dans l'éq : $ux + vy + 1 = 0$ où $w = 1$, on pourrait rendre un des 2 param. u et v fonction de l'autre.

Un système particulier est celui où l'on prend pour paramètre l'angle de la tangente avec l'axe des x. On écrit l'éq. de la droite sous la forme suivante :

$$x \sin\alpha - y\cos\alpha = p$$

Le coefficient angulaire de la droite est $\operatorname{tang}\alpha$; la distance de la droite à l'origine est p. Si l'on considère p comme une fonction de α, la droite tournera dans le plan suivant une certaine enveloppe. A chaque courbe correspond une tangente pour laquelle p est une certaine fonction de α : inversement, à chaque fonction p de α correspond une certaine enveloppe. On n'a qu'à poser comme paramètres :

$$u = \sin\alpha \qquad v = -\cos\alpha \qquad w = -p.$$

ce qui simplifie les calculs. La droite touche son enveloppe en un point déterminé par l'éq :

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p' \qquad (p' \text{ dérivée par rapport à } \alpha.)$$

C'est l'équation précédente où l'on a changé p en p' ~~et~~ et α en $\alpha + \frac{\pi}{2}$. C'est l'équation de la normale au p. de contact. Elle peut définir la développée de la courbe qui n'est autre que l'enveloppe de ses normales.

Pour avoir le point de contact, on résout les 2 éq. précédentes.

On a les solutions : $\begin{cases} x = p' \cos\alpha + p \sin\alpha \\ y = p' \sin\alpha - p\cos\alpha \end{cases}$

et leurs dérivées : $\begin{cases} x' = (p+p'') \cos\alpha \\ y' = (p+p'') \sin\alpha \end{cases}$

x' et y' sont les coordonnées ~~du point où la normale touche~~ de la tangente à la courbe enveloppe ~~son enveloppe (c.à.d. du centre de courbure)~~ $\frac{y'}{x'} = \text{tang}\,\alpha$.

Pour avoir le rayon de courbure, on calculera :

$$\frac{x'y'' - y'x''}{x'^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \text{dérivée de tang}\,\alpha.$$

Donc : $x'y'' - y'x'' = \frac{x'^2}{\cos^2\alpha} = (p+p'')^2$

L'expression du rayon de courbure est $\frac{(p+p'')^3}{(p+p'')^2} = p+p''$.

Exercice : Calculer les coordonnées du centre de courbure p. 11.

Ce sont les racines du système : $\begin{cases} x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha = p' \\ -x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha = p'' \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = p'\cos\alpha - p''\sin\alpha \\ y_1 = p'\sin\alpha + p''\cos\alpha \end{cases}$$

car le centre de courbure est le point où la normale touche son enveloppe. — En retranchant ces valeurs de celles de x, y, on a :

$$x - x_1 = (p+p'')\sin\alpha = -(p+p'')\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y - y_1 = -(p+p'')\sin\alpha = -(p+p'')\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ainsi le segment de la normale qui va du p. (x, y) au p. (x_1, y_1) et qui n'est autre que le rayon de courbure, fait avec l'axe des x l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$ et sa longueur est $p+p''$.

Théorie générale du changement de variables.

Nous avons vu comment on peut changer la variable indépendante dans une équation où elle entre avec des fonctions de cette variable et leurs dérivées par rapport à elle :

$$F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dz^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

Exercice : Désignons par $A, B, C, \ldots\ldots I$ n fonctions de x : Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & \frac{dA}{dx} & \frac{d^2A}{dx^2} & \cdots & \frac{d^{n-1}A}{dx^{n-1}} \\ B & \frac{dB}{dx} & \frac{d^2B}{dx^2} & \cdots & \frac{d^{n-1}B}{dx^{n-1}} \\ C & \frac{dC}{dx} & \frac{d^2C}{dx^2} & \cdots & \frac{d^{n-1}C}{dx^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & \frac{dI}{dx} & \frac{d^2I}{dx^2} & \cdots & \frac{d^{n-1}I}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

Faisons $x = \varphi(t)$. Le déterminant se transformera en un déterminant semblable où x serait remplacé par t, et multiplié par une certaine puissance de $\dfrac{1}{\varphi'(t)}$

– Soit à substituer à la variable indépendante x la variable ξ, et aux fonctions y et z de x des fonctions η et ζ de ξ. On aura en général 3 équations de la forme suivante :

$$\begin{cases} f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0 \\ \varphi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0 \\ \psi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0 \end{cases}$$

Si on les suppose résolues par rapp. à ξ, η, ζ, on a les valeurs de ces variables en fonction de x, y, z, c. à d. en définitive en fonction de x. Si on les suppose résolues par rapport à x, y, z, on a les valeurs de ces variables en fonction de ξ, η, ζ. Si on remplace y et z ~~en fonction de~~ par leurs expressions en x, on a 3 équations entre x, ξ, η, ζ ; si l'on élimine x, on aura η et ζ en fonction de ξ, et ces fonctions sont telles,

que si on les substitue à η et ξ dans les 3 éq. primitives, et si on remplace ξ, y et z par leurs valeurs en x, ces équations deviennent des identités. Différentions ces 3 éq. dans cette supposition :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \\ \text{plus 2 autres équations analogues en } \varphi \text{ et } \psi. \end{array} \right.$$

Elles donnent $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{dy}{dx}, \frac{\partial z}{\partial x}$ en fonction de $\frac{\partial \eta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \xi}$, etc.

Les équations en dérivées secondes donneraient de même :

$$\frac{\partial^2 y}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Les calculs ~~être~~ sont plus simples si les équations sont résolues soit par rapport aux x, y, z, soit par rapport aux ξ, η, ζ.

— Cas d'une fonction à plusieurs variables indépendantes :

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{dx^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\ldots\ldots\right)$$

On peut avoir à changer les 2 variables indépendantes. Soient les formules de transformation :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f(\xi, \eta) \\ y = \varphi(\xi, \eta) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = F(x, y) \\ \eta = \Phi(x, y) \end{array} \right.$$

Si on remplace x et y par leurs valeurs, la fonction devient fonction de ξ et η ; inversement, si on y remplace ξ et η par leurs valeurs, on obtient la fonction primitive en x et y.

Calculons les dérivées premières dans cette hypothèse :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad \text{en fonction des dérivées}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

On peut obtenir ces dérivées sans résoudre les équations. Si l'on remplace, dans les éq. f et φ, ξ et η par leurs valeurs F et Φ, ces éq. deviennent des identités. Prenons leurs dérivées par rapport à x et à y :

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ 1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases}$$

Pour les dérivées secondes on aurait des calculs analogues.

Maintenant les dérivées par rapport à x (tirées des équations précédentes) ~~sont devenues~~ des fonctions de ξ et η ; posons donc :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = B, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = C, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = D.$$

On pourra dès lors avoir les dérivées secondes en f de ξ et η.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A\frac{\partial z}{\partial \xi} + B\frac{\partial z}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = C\frac{\partial z}{\partial \xi} + D\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial A}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta} + A\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}\right]A + \left[\frac{\partial A}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta} + A\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta} + B\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right]B$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A^2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2AB\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta} + B^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(A\frac{\partial A}{\partial \xi} + B\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)\frac{\partial z}{\partial \xi} + \left(A\frac{\partial B}{\partial \xi} + B\frac{\partial B}{\partial \xi}\right)\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

On aurait de même :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = AC\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + (BC+AD)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + BD\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$
$$+ \left(C\frac{\partial A}{\partial \xi} + D\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)\frac{\partial z}{\partial \xi} + \left(C\frac{\partial B}{\partial \xi} + D\frac{\partial B}{\partial \eta}\right)\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C^2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2CD\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + D^2\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$
$$+ \left(C\frac{\partial C}{\partial \xi} + D\frac{\partial C}{\partial \eta}\right)\frac{\partial z}{\partial \xi} + \left(C\frac{\partial D}{\partial \xi} + D\frac{\partial D}{\partial \eta}\right)\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

— On pourrait aussi transformer une fonction de plusieurs variables de façon ~~[illegible]~~ que les variables indépendantes fussent ~~indifférentes~~.

Soit une fonction de 3 variables, x, y, z, que l'on a en fonction de 2 paramètres u, v ; $x = f(u,v)$ $y = \varphi(u,v)$ $z = \psi(u,v)$.

Si l'on éliminait u et v entre ces 3 équations, on aurait par ex. z en fonction de x et de y. Pour avoir les expressions de $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, il faut considérer u et v comme des fonctions de x et de y obtenues en résolvant les 2 premières équations —

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Pour avoir les expressions de $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$, prenons les dérivées de $x = f(u,v)$ qui est une identité, par rapport à x ; Prenons aussi celles de $y = \varphi(u,v)$: par rapport à x ;

$$\begin{cases} 1 = \frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx} \\ 0 = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} \end{cases}$$

En résolvant ces 2 éq., on obtiendra $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dv}{dx}$, et on aura $\frac{dz}{dx}$

en fonction de $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}, \frac{dx}{dv}, \frac{dy}{dv}, \frac{dz}{dv}$.
On obtiendrait de même l'expression correspondante de $\frac{dz}{dy}$.
On exprimera alors $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}$ en fonction des dérivées ~~secondes~~ premières et secondes de x, y, z par rapport à u et v.
La fonction deviendra finalement :

$$F\left(x, y, z, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}, \frac{dx}{dv}, \frac{dy}{dv}, \frac{dz}{dv}, \frac{d^2x}{du^2}, \frac{d^2x}{dudv}, \frac{d^2x}{dv^2}, \frac{d^2y}{du^2} \ldots\ldots\right)$$

Il suffirait de faire $x = u$ et $y = v$ pour retrouver la fonct primitive, où z était fonction de x et de y.
Si au contraire on voulait avoir y et z comme variables indép. on ferait $y = u$, $z = v$, $x = f(y, z)$
et la fonction prendrait la forme :

$$F\left(x, y, z, \frac{dx}{dy}, \frac{dx}{dz}, \frac{d^2x}{dy^2}, \frac{d^2x}{dz^2}, \ldots\ldots\ldots\right)$$

— Cas où l'on veut changer à la fois les variables indépendantes et leurs fonctions. Soit la fonction implicite z de x et de y :

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \ldots\ldots\right)$$

Supposons que nous ~~voul~~ veuillons avoir ξ et η au lieu de x et y, et ζ fonction de ξ et η au lieu de z. Soient les formules de transformation :

$$\begin{cases} x = f(\xi, \eta, \zeta) \\ y = \varphi(\xi, \eta, \zeta) \\ z = \psi(\xi, \eta, \zeta) \end{cases}$$

On pourrait préparer la fonction F comme plus haut, de manière qu'elle ne contint plus que les dérivées de x, y, z par rapport à deux variables indépendantes quelconques

u et v. On regarderait ensuite ξ, η, ζ comme des fonctions de x, y, z telles qu'elles vérifient les 3 équations, et on les obtiendrait en fonction de u et de v. On tirerait les dérivées dans cette hypothèse :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial u} \quad \text{De même } \frac{\partial x}{\partial v}.$$

On substituerait à $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ leurs valeurs en dérivées par rapport à ~~u et v~~ ξ, η, ζ. Puis on poserait $\xi = u$, $\eta = v$, et on aurait la transformée :

$$F\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}, \dots\dots\dots\right)$$

Mais on peut résoudre directement le même problème. ζ doit être regardé comme une fonction de x et de y. Dans la relation qui lie z à x et y, on porterait les valeurs de x, z, y en f, φ, ψ, on aurait une équation entre les 3 variables ξ, η, ζ, qui définirait la fonction ζ correspondante à la fonction z.

Si au contraire ζ est cette fonction de ξ et de η, les 2 premières équations donnent ξ et η en fonction de x et y ; si on remplace dans la 3e, ξ, η, ζ par leurs valeurs, on aurait justement la fonction z de x et y.

Nous allons donc supposer ζ fonction de ξ et η, et z, ξ, η fonctions de x et y. Prenons la dérivée de z par rapport à x dans cette supposition. Il faut remarquer

que ξ et η figurent dans l'équation de z explicitement et implicitement (dans l'expression de ζ.) :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Reste à déterminer $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$. Nous les tirerons des 2 premières équations, qui sont devenues des identités :

$$\begin{cases} 1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ 0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\cdot\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} \end{cases}$$

Ces 2 équations du premier degré donneront $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$.

On calculerait de même $\frac{\partial z}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ et de $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$.

Notation différentielle

Considérons une fonction de n variables indépendantes :

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n)$$

Nous conviendrons de faire correspondre à ces variables une autre série de variables : $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots\ldots dx_n$ et nous considérerons la forme linéaire suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Nous regarderons cette forme comme une variable df que nous ferons correspondre à la fonction f, et nous l'appellerons la <u>différentielle totale</u> de f.

On appelle <u>différentielle partielle</u> de f le produit de chaque dérivée partielle de f par la différentielle de la variable par rapport à laquelle on a pris la dérivée. On voit que la différentielle totale d'une fonction est la somme de ses différentielles partielles.

Dans le cas d'une fonction d'une seule variable, on a :

$$df = f'(x)\, dx$$

Si une fonction de plusieurs variables est identiquement nulle, sa différentielle est nulle ; et inversement, si la différentielle est nulle la fonction est nulle.

L'emploi des symboles différentiels est justifié par le théorème fondamental suivant :

Étant donnée une fonction de n variables $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, et un nombre p de variables : $y_1, y_2 \ldots\ldots y_p$, de sorte qu'on ait ; $x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots\ldots y_p)$ $1 \leq i \leq n$.

la fonction f deviendra ;

$$F(y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots\ldots y_p)$$

si l'on fait correspondre à chaque variable y sa différentielle dy, puis à chaque fonction φ sa différentielle dx, de la forme : $dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_2} dy_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_p} dy_p$

Supposons que dans $\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, on remplace dx_i par sa valeur en $y_1, y_2, \ldots\ldots y_p$, on aura l'expression de df en fonction de $dy_1, dy_2, \ldots\ldots dy_p$. — Je dis que cette forme linéaire est identique à dF :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial F}{\partial y_3} dy_3 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial y_p} dy_p$$

Faisons en effet les substitutions indiquées. Le coefficient de dy_1 dans la nouvelle expression de df sera ;

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_1} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1}$$

Et plus généralement le coefficient de dy_i sera ;

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_i} + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_i}$$

On a donc remplacé $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ par leurs valeurs en $y_1, y_2, \ldots\ldots y_p$. Or le coefficient de dy_1 dans la fonction transformée est la dérivée partielle de F par rapport à y_1 ; le coefficient de dy_i est la dérivée partielle de F par rapport à y_i. On a donc identiquement :

$$df(y_1, y_2 \ldots\ldots y_n) = \frac{\partial F}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} dy_2 + \ldots\ldots \frac{\partial F}{\partial y_p} dy_p = dF.$$

Application à la recherche des dérivées de fonctions implicites.

— Cas le plus simple : $f(x, y) = 0$.

Cette équation définit y en fonction de x. Si l'on y remplace y par cette fonction de x, f devient identiquement nul. Sa différentielle est en général : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

Si dans cette formule on remplace y par sa valeur en x, et dy par la différentielle de y par rapport à x, on a la différentielle de f quand on y considère y comme la fonction de x qu'on obtient en résolvant l'éq : $f = 0$ par rapp. à y. Or f est alors identiquement nul, sa différentielle aussi :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \qquad dy = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} dx$$

Telle est la différentielle de y fonction implicite de x.

— Cas général de fonctions implicites $y_1, y_2, \ldots\ldots y_p$ des variables $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, fonctions définies par p équations entre les x et les y, de la forme

$$f_i(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, y_1, y_2, \ldots\ldots y_p) = 0 \quad 1 \leq i \leq p.$$

Supposons qu'on ait résolu ces p équations par rapport aux y, et qu'on leur y substitue leurs valeurs en fonction des x; les premiers membres de ces équations deviendront identiqt. nuls; donc aussi leurs différentielles.

On remplacera les différentielles des y par leurs différentielles par rapport aux x; les différentielles des f deviennent alors des fonctions linéaires des différentielles des x:

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}dy_2 + \ldots \frac{\partial f_1}{\partial y_p}dy_p$$

$\vdots$

On a ainsi p équations linéaires entre $dy_1, dy_2, \ldots\ldots dy_p$. Si on les résout, on aura l'expression des dy sous la forme:

$$dy_i = A_{i,1}dx_1 + A_{i,2}dx_2 + A_{i,3}dx_3 + \ldots\ldots + A_{i,n}dx_n$$

Les A sont des fonctions des y. On voit qu'on doit avoir:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1} = A_{i,1} \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_2} = A_{i,2} \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_n} = A_{i,n}$$

On a ainsi toutes les dérivées partielles de y_i par rapp aux x.

— Exemple. Prenons les formules de transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\omega \\ y = \rho\sin\omega \end{cases}$$

Ces 2 équations définissent ρ et ω en fonction de x et y. Nous voulons calculer les dérivées de ρ et ω par rapp. à x et y.

$\{ dx = d\rho \cos\omega - \rho \sin\omega \, d\omega$ $\quad dy = d\rho \sin\omega + \rho\cos\omega \, d\omega$

d'où : $\{ d\rho = \cos\omega \, dx + \sin\omega \, dy$ $\quad d\omega = -\frac{1}{\rho}\sin\omega \, dx + \frac{1}{\rho}\cos\omega \, dy$

ce qui donne les formules :

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \cos\omega \qquad \frac{\partial\rho}{\partial y} = \sin\omega \qquad \frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{-\sin\omega}{\rho} \qquad \frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\cos\omega}{\rho}$$

Il n'y a plus qu'à remplacer ω et ρ par leurs valeurs en x et y :

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

— Des différentielles premières on tire les différentielles secondes par une définition semblable. La différentielle première de f est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3 + \dots\dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

C'est une ~~nouvelle~~ autre fonction de $x_1, x_2, \dots\dots x_n$, et des nouvelles variables que nous avons introduites, $dx_1, dx_2, \dots\dots dx_n$. Pour en prendre la différentielle, nous adjoindrons aux x de nouvelles variables que nous appellerons $dx_1, dx_2, \dots\, dx_n$, et aux dx de nouvelles variables que nous appellerons $d^2x_1, d^2x_2, \dots\dots d^2x_n$, c. à d. différentielles secondes des x.

Nous aurons :

$$\begin{aligned} d.df = {} & dx_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}dx_2 \dots\dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}dx_n\right) \\ & + dx_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2 \dots\dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}dx_n\right) \\ & \dots\dots\dots \\ & + dx_n\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}dx_2 \dots\dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n\right) \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_1}d^2x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}d^2x_2 + \dots\dots\dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}d^2x_n \end{aligned}$$

La différentielle seconde de f est ce que devient l'expression précédente quand on suppose que les δx sont identiques aux dx; et on la désigne par le symbole d^2f. On voit qu'elle comprend 2 parties; la seconde est linéaire par rapport aux nouvelles variables d^2x; l'autre est une forme quadratique par rapport aux anciennes variables dx, dont le terme général est : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} dx_\alpha dx_\beta$

Si $\alpha = \beta$, on a ∂x^2 et dx^2. S'ils sont différents on a 2 termes semblables dans la forme quadratique.

— Comme cas particulier, nous allons calculer la différentielle d'une fonction de 2 variables.

Soit par exemple $z = f(x, y)$ Posons :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial y}.$$

On a d'abord : $dz = p\,dx + q\,dy$

Puis : $$d^2z = \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy\right) dy + p\,d^2x + q\,d^2y$$

En supprimant les barres :

$$= (r\,dx + s\,dy)\,dy + (s\,dx + t\,dy)\,dy + p\,d^2x + q\,d^2y$$

$$= r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x + q\,d^2y$$

On passera de même de la différentielle seconde à la différentielle troisième, en appliquant toujours la même règle.

La différentielle seconde est une fonction des variables :

$$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, dx_1, dx_2, \ldots\ldots dx_n, d^2x_1, d^2x_2, \ldots\ldots d^2x_n.$$

Nous adjoindrons aux variables x les nouvelles variables $\overline{dx}$;

———— dx ———— $\overline{d^2x}$;

———— d^2x ———— $\overline{d^3x}$,

que nous appellerons différentielles 3es des x. Nous formerons d^3f, puis nous supprimerons les barres, en admettant l'égalité respective de tous les dx et de tous les d^2x. On aura ainsi la différentielle 3e de f en fonction de $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, $dx_1, dx_2, \ldots\ldots dx_n$, $d^2x_1, d^2x_2, \ldots\ldots d^2x_n$, $d^3x_1, d^3x_2, \ldots\ldots d^3x_n$.

— On pourrait partir aussi de l'expression de d^2f en fonction de $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, dx_1, dx_2, \ldots\ldots dx_n, \overline{dx_1}, \overline{dx_2}, \ldots\ldots \overline{dx_n}$, en y adjoignant de nouvelles variables, qu'on représenterait par $\overline{\overline{dx_1}}, \overline{\overline{dx_2}}, \ldots\ldots \overline{\overline{dx_n}}, \underline{d^2x_1}, d^2x_2, \ldots\ldots \underline{d^2x_n}, \overline{d^2x_1}, \overline{d^2x_2}, \ldots\ldots \overline{d^2x_n}$.
On supprimerait ensuite toutes les barres, et on trouverait la même expression que ci-dessus.

— Comme exemple, nous allons calculer d^3z $(z = f(x, y))$

$$d^3z = dx^2\left(\frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy\right) + 2dxdy\left(\frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}dy\right) + dy^2\left(\frac{\partial t}{\partial x}dx + \frac{\partial t}{\partial y}dy\right)$$
$$+ d^2x(r\,dx + s\,dy) + d^2y(s\,dx + t\,dy)$$
$$+ 2r\,dx\,d^2x + 2s\,d^2x\,dy + 2s\,dx\,d^2y + 2t\,dy\,d^2y$$
$$+ p\,d^3x + q\,d^3y$$

Si l'on substitue dans ce développement les valeurs connues:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

on a:

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3$$
$$+ 3r\,dx\,d^2x + 3s\,d^2x\,dy + 3s\,dx\,d^2y + 3t\,dy\,d^2y$$
$$+ p\,d^3x + q\,d^3y$$

La 1e ligne est une forme cubique en dx, dy.
On formerait de même la différentielle quatrième, &a.

— Les règles pour former une différentielle d'ordre quelconque d'une fonction quelconque et l'observation des différentielles des premiers ordres d'une fonction de 2 variables suggèrent les remarques suivantes:

Considérons la différentielle d'ordre p de la fonction f. On reconnaît aisément qu'elle a pour terme général:

$$A\,(dx_1)^{\alpha_1}(dx_2)^{\alpha_2}(dx_3)^{\alpha_3}\cdots\cdots(dx_n)^{\alpha_n}$$
$$\times(d^2x_1)^{\beta_1}(d^2x_2)^{\beta_2}(d^2x_3)^{\beta_3}\cdots\cdots(d^2x_n)^{\beta_n}$$
$$\vdots$$
$$\times(d^px_1)^{\pi_1}(d^px_2)^{\pi_2}(d^px_3)^{\pi_3}\cdots\cdots(d^px_n)^{\pi_n}$$

(A est fonction de $x_1, x_2 \ldots x_n$.)

Si nous appelons *poids* de ce terme la somme suivante:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_n$$
$$+ 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_n)$$
$$+ 3(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \gamma_n)$$
$$\vdots$$
$$+ p(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \pi_n)$$

on voit que pour les premières différentielles d'une fonction de plusieurs variables, le poids est le même pour tous les termes, et il est égal à l'ordre p de la différentielle. On peut en conclure par induction la règle générale du poids, en montrant que si elle est vraie pour la différentielle p^e, elle l'est aussi pour la différentielle $(p+1)^e$. — En effet, le terme général de ~~l~~ celle-ci s'obtiendra en différentiant le terme général représenté plus haut ; on aura ainsi :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial A}{\partial x_3} dx_3 + \ldots\ldots + \frac{\partial A}{\partial x_n} dx_n\right) P$$

~~$+ A\alpha_1 (dx_1)^{\alpha-1} + A\alpha_2 (dx_2)^{\alpha_2 - 1} + \ldots\ldots A\alpha_n (dx_n)^{\alpha_n - 1}$~~

en posant P égal au terme général de la différentielle $(p)^e$, abstraction faite de son coefficient A ; ~~puis~~ ce terme est de poids $(p+1)$; les suivants sont :

$$A\alpha_1 (dx_1)^{\alpha_1 - 1} (dx_2)^{\alpha_2} (dx_3)^{\alpha_3} \ldots (dx_n)^{\alpha_n} (d^2x_1)^{\beta_1 + 1} (d^2x_2)^{\beta_2} \ldots\ldots$$
$$+ A\alpha_2 (dx_1)^{\alpha_1} (dx_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots\ldots (dx_n)^{\alpha_n} (d^2x_1)^{\beta_1} (d^2x_2)^{\beta_2 + 1} \ldots\ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le poids dans chacun baisse de 1 pour $\alpha - 1$, et monte de 2 pour $\beta + 1$; il est donc $(p+1)$. Il est facile de voir que dans tous les termes il y aura une compensation analogue.

La différentielle est donc une fonction homogène quant au poids (isobare).
Supposons que l'on regarde les différentielles dx d'un ordre quelconque comme des infiniment petits du même ordre, la différentielle totale d'ordre p sera un infiniment petit d'ordre p.
— Si nous considérons à part les termes où ne figurent que les différentielles premières : $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots\ldots dx_n$, on peut en trouver la loi de formation
Nous avons vu que dans la différentielle seconde de

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n)$$

les termes en $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots\ldots dx_n$ composent une forme quadratique dont le terme général est :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} dx_\alpha dx_\beta \qquad \alpha + \beta = n$$

On peut représenter cette forme quadratique par le symbole

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right)^2$$

en convenant que dans le développement de cette puissance les exposants seront remplacés par des indices égaux
Nous allons montrer que la loi est générale et que si elle est vraie pour la différentielle p^e, elle l'est aussi pour la différentielle $(p+1)^e$. On peut représenter la 1e par le symbole

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right)^p$$

Supposons-la développée et considérons son terme général :

$$A \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \ldots\ldots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} dx_3^{\alpha_3} \ldots\ldots dx_n^{\alpha_n}$$

où $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n = p$, et où A est un coefficient numérique de la forme : $f(x_1, x_2, \ldots x_n) \dfrac{p!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\ldots\alpha_n!}$

(Nous ne considérons que les termes qui ne contiennent que les différentielles premières, car nous voulons seulement obtenir les termes en différentielles premières de la $(p+1)^e$ différentielle) :

Posons $P = dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} dx_3^{\alpha_3} \ldots\ldots dx_n^{\alpha_n}$, et différentions le terme général ; nous aurons d'abord :

$$AP\left(\frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_1^{\alpha_1+1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1 + \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2+1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_2 \ldots\ldots\ldots\right)$$

puis des différentielles de P qui donneraient des différentielles 2es, et que nous négligeons. — On aurait eu le même résultat en effectuant symboliquement la multiplication du terme général par $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right)$

Ce qui prouve que la règle symbolique s'applique à la $(p+1)^e$ différentielle ; ainsi on peut l'écrire symboliquement :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right)^p \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right)^{p+1}$$

— La proposition fondamentale que nous avons établie pour les différentielles du 1er ordre relativement au changement des variables subsiste pour les différentielles d'ordre quelconque

— Considérons la différentielle p^e de la fonction :

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n)$$

Cette différentielle est une fonction de la forme :

$$F(x_1 - x_n, dx_1 - dx_n, d^2x_1 - d^2x_n \ldots\ldots d^px_1 - d^px_n)$$

Supposons qu'à $x_1 - x_n$ on substitue dans F les fonctions $y_1 - y_r$ définies par les relations :

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots y_r)$$

à la place de dx_α on substituera :

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_3} dy_3 + \ldots\ldots + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_r} dy_r.$$

à la place de d^2x_α on substituera :

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial y_1^2} dy_1^2 + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial y_1 \partial y_2} dy_1 dy_2 + \ldots\ldots$$ et ainsi de suite,

Toutes ces opérations faites, F sera transformée en une fonction : $\Phi(y_1 - y_r, dy_1 - dy_r, d^2y_1 - d^2y_r \ldots\ldots d^py_1 - d^py_r)$

— Théorème général. Cela étant posé, cette nouvelle fonction est identique à celle qu'on obtiendrait en substituant les φ aux x dans f et en prenant la différentielle p^e de la transformée.

On pourrait établir cette proposition en calculant de proche en proche les différentielles successives à partir de ~~de~~ la 1e. Il nous suffira de la prouver par induction, en montrant que si elle est vraie de la différentielle p^e, elle l'est aussi de la $(p+1)^e$

Pour simplifier l'écriture, nous ferons $x'_\alpha = dx_\alpha$, $x^{(p)}_\alpha = d^p x_\alpha$.

Soit la différentielle p^e de f ;

$$F\left(x_\alpha, x'_\alpha, x''_\alpha, \ldots\ldots\ldots x^{(p)}_\alpha\right)$$

et soit : $\Phi\left(y_\beta, y'_\beta, y''_\beta, \ldots\ldots\ldots y^{(p)}_\beta\right)$

ce qu'elle devient quand on y substitue aux x leurs valeurs en y.
Ces deux expressions sont par hypothèse identiques si on remplace dans la première : x_α par φ_α,

$$x'_\alpha \text{ par } \left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_2} y'_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_n} y'_n\right)$$

et de même x''_α par $\left(\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial y_1^2} y'^2_1 + \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial y_1 \partial y_2} y'_1 y'_2 + \ldots\ldots\ldots\right)$ etc.

Si dans cette hypothèse on prend leurs différentielles, on aura :

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \frac{\partial F}{\partial x'_\alpha} dx'_\alpha + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial x^{(p)}_\alpha} dx^{(p)}_\alpha =$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial y_\beta} dy_\beta + \frac{\partial \Phi}{\partial y'_\beta} dy'_\beta + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(p)}_\beta} dy^{(p)}_\beta .$$

Or si dans la 1^e expression on remplace

$$dx_\alpha \text{ par } \left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_2} y'_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_n} y'_n\right)$$

$$d^2 x'_\alpha \text{ par } \left(\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial y_1^2} y'^2_1 + \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial y_1 \partial y_2} y'_1 y'_2 + \ldots\ldots\ldots\right) \text{ etc.}$$

elle deviendra :

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_2} y'_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial x^{2+}_\alpha} \cdot \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial y_1^2} dy_1^2 + \ldots\ldots\ldots$$

c.à.d. la différentielle $(p+1)^e$ de f considérée comme fonction

~~des y~~ des x , ~~par suite de la substitution des~~ quand on y substitue les φ aux x. La seconde expression est la différentielle $(p+1)^e$ de f considérée comme fonction des y. On voit qu'elles sont identiques :

$$F' = \Phi'.$$

Cette propriété fait la valeur et l'utilité des symboles différentiels, parce que la notation demeure la même, soit que les variables soient indépendantes, soit qu'elles soient fonctions d'autres variables.

— Par exemple, considérons le produit uv. On peut regarder ~~tan~~ u et v tantôt comme variables indépendantes, tantôt comme fonctions.

Dans le premier cas, la différentielle première est :

$$v\,du + u\,dv$$

Dans le second cas, la différentielle est la même ; il suffit de remplacer du, dv par leurs expressions :

si : $\begin{cases} u = f(x,y) \\ v = \varphi(x,y) \end{cases}$ on écrira :

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad dv = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$$

et la différentielle deviendra :

$$f\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + f\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \varphi\frac{\partial f}{\partial x}dx + \varphi\frac{\partial f}{\partial y}dy = \left(f\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(f\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$$

Sous cette dernière forme, elle est la différentielle du produit uv par rapport aux variables indépendantes x et y.

8e On calculerait de même la différentielle seconde :

$$u d^2 v + 2 du dv + v d^2 u.$$

Il suffirait d'y faire : $du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

$$dv = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

$$d^2 u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y$$

$$d^2 v = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} d^2 y$$

– On calculerait de la même manière les différentielles 1re, 2e, etc. de la fraction $\frac{u}{v}$. On aurait d'abord :

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$ puis :

$$d^2\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v^3 d^2 u - v^2 u d^2 v - 2v^2 du dv + 2 v u dv^2}{v^4}$$

– Considérons une fonction : $f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n)$

et sa différentielle première : $\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$

Si dans f on remplace les x par des fonctions de t, f deviendra fonction de t. Si on remplace ~~les~~ dans la différentielle les dx par les dérivées des x par rapport à t, on aura la dérivée première de f par rapport à t.

Or si $F(t)$ est ce que devient f quand y remplace les x par des fonctions de t, sa différentielle première sera :

$$F'(t)\,dt = \frac{\partial f}{\partial x_1} Dx_1\,dt + \frac{\partial f}{\partial x_2} Dx_2\,dt + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} Dx_n\,dt$$

d'où : $F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} Dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} Dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} Dx_n$

ce qui est justement la dérivée première de f par rapport ~~à~~ t, obtenue par l'autre procédé –

De même, si l'on prend la différentielle seconde de f :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \ldots\right) dx_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_1} d^2x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d^2x_2 + \ldots\ldots$$

et que l'on y remplace dx_α par $Dx_\alpha dt$, d^2x_α par $D^2x_\alpha dt^2$, on aura identiquement la différentielle seconde de $F(t)$.

Nous allons prouver par induction que cette loi est générale en montrant que si elle est vraie pour la différentielle p^e, elle l'est aussi pour la $(p+1)^e$. Posons pour abréger : $dx_\alpha = x'_\alpha$, $d^2x_\alpha = x''_\alpha$, etc. La différentielle p^e a la forme :

$$F(x_1 \ldots x_n,\ x'_1 \ldots x'_n,\ x''_1 \ldots x''_n \ldots\ldots x_1^{(p)} \ldots x_n^{(p)})$$

Si on y ~~regarde~~ l'remplace les différentielles des x ~~espr~~ par les dérivées des x par rapport à t, l'expression devient la dérivée p^e de F par rapport à t – Prenons-en la différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial x'_1} dx'_1 + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1^{(p)} \ldots\ldots$$

Si l'on y remplace dx_α par x'_α, dx'_α par x''_α, ... $dx_\alpha^{(p)}$ par $x_\alpha^{(p+1)}$, cette expression devient la différentielle $(p+1)^e$ de f par rapp. à t.

Application. Considérons une fonction de n variables :

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n)$$

Supposons qu'on y remplace les x par des fonctions de la forme :

$$x_\alpha = a_\alpha + b_\alpha t$$

les a et b étant des constantes, et t une nouvelle variable.
Remplaçons dans la différentielle p^e les différentielles dx_α par les dérivées Dx_α des x par rapport à t. Or on a :

$$Dx_\alpha = b_\alpha \quad , \quad D^2x_\alpha = 0, \quad D^3x_\alpha = 0 \ldots\ldots D^{(p)}x_\alpha = 0.$$

Si l'on porte ces valeurs dans la ~~dérivée~~ différentielle p^e de f par rapp à t, il ne restera que l'ensemble des termes en dx, forme homogène du degré p, dont l'expression symbolique est :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right)^p = \sum \frac{p!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!} \cdot \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} \, dx_1^{\alpha_1}\ldots dx_n^{\alpha_n}$$

(On a toujours : $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = p$.)

Il suffit de remplacer les dx par des Dx pour avoir la ~~résulte~~ dérivée p^e de f par rapport à t.

— Cas particulier : Soit une fonction d'une seule variable indép. :

$$y = f(x)$$

Ses différentielles successives sont :

$$dy = f'(x)\,dx = y'dx$$

$$d^2y = y''dx^2 + y'd^2x$$

$$d^3y = y'''dx^3 + 3y''dx\,d^2x + y'd^3x \quad , \quad \text{etc.}$$

Si l'on résout ces égalités par rapport à $y', y'', y''', \ldots$ on a :

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad y'' = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^3} \qquad y''' = \frac{dx^2d^3y - 3dx\,d^2x\,d^2y + 3d^2x^2dy - dx\,d^3x\,dy}{dx^5}$$

Comme toutes les équations en dy sont isobares (homogènes quant au poids) par rapport aux dx, les expressions de y', y'', y''' qu'on en tire sont elles-mêmes isobares et de poids 0.

— Il faut signaler une confusion à laquelle la notation différentielle donne lieu. Ici $\frac{dy}{dx}$ est le quotient de 2 différentielles, mais en général $\frac{dy}{dx}$ représente seulement la dérivée de y par rapport à x. Les deux significations de ce symbole se confondent donc au 1er degré, mais elles se séparent dès le 2e degré ; ainsi le quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ n'est nullement égal à la dérivée

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^3}$$

Ainsi en général, $\frac{d^ny}{dx^n}$ est un simple signe de dérivation, un symbole d'opération, et non un rapport véritable.

— Nous venons de voir que toutes les dérivées successives peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles isobares et de poids 0 des différentielles de y et de x. — On peut les obtenir d'une manière différente, par différentiations successives. Soit la 1e :

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Prenons la différentielle des 2 membres :

$$y''dx = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2} \qquad y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

De même, prenons la différentielle de y'' ;

$$y'''dx = \left(-\frac{2d^2y}{dx^3} + 3\frac{dy\,d^2x}{dx^4}\right)d^2x - \frac{d^2x}{dx^3}d^2y - \frac{dy}{dx^3}d^3x + \frac{d^3y}{dx^3}$$

d'où : $$y''' = \frac{dx^2d^3y - 3dx\,d^2x\,d^2y + 3dy\,d^2x^2 - dx\,d^3x\,dy}{dx^5}$$

Nous reconnaissons ces formules ; ~~et l'on~~ si l'on regarde x et y comme des fonctions d'une variable t, et dx, dy comme leurs dérivées par rapport à t, toutes les équations précédentes restent identiques, en supposant que y', y'', fonctions de x sont devenues fonctions de t en y remplaçant x par sa valeur en t. Donc, si l'on substituait des D aux d, on retrouverait les formules par lesquelles on transforme les dérivées de y par rapport à x quand on rend y et x fonctions de t. Ces formules sont donc celles qui servent à effectuer les changements de variables. v. p. 4-5.

<u>Exemple</u>. Prenons le cas de la transformation des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires, suivant les formules :

$$x = \rho\cos\omega \qquad y = \rho\sin\omega$$

On remplacerait les ~~dérivées~~ différentielles de x et y par leurs valeurs :

$$dx = d\rho\cos\omega - \rho\sin\omega\,d\omega \qquad dy = d\rho\sin\omega + \rho\cos\omega\,d\omega \quad \text{etc.}$$

et on aurait des formules où ne figureraient que $d\rho$, $d\omega$, $d^2\rho$, $d^2\omega$ .... Si ensuite on fait ρ fonction de ω, on fera $d\omega = 1$, $d^2\omega = d^3\omega = \ldots\ldots = 0$, et les dérivées de ρ seront relatives à ω.

En général, si l'on a une fonction de la forme :

$$f(x, y, y', y'', y''' \ldots\ldots)$$

on peut y remplacer les dérivées de y par leurs expressions en différentielles ; la transformée restera isobare si elle l'était.

Par exemple, soit la formule du rayon de courbure :

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad \text{on aura :} \quad R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y + dy d^2x}$$

— Remarque relative à l'ambiguïté de la notation différentielle.

La différentielle p^e de y a pour premier terme :

$$y^{(p)} dx^p$$

On dit souvent, surtout dans les traités anciens :

Lorsqu'on fixe la variable indépendante, on appelle différentielle p^e de y le 1er terme du développement général.

Dans ce cas, en effet, on a bien : $y^{(p)} = \dfrac{d^{(p)}y}{dx^p}$

On dit aussi : On regarde dx comme constante (ce qui revient à dire que x est la variable indépendante.)

Mais comme le grand avantage de la notation différentielle consiste à laisser les variables indépendantes indéterminées, si l'on veut spécifier les variables, il vaut mieux employer les dérivées.

Pour nous, les différentielles auront toujours leur sens général, sans que la variable soit spécifiée.

— Il est clair que si dans l'expression générale de la différentielle

p^e on fait $dx = 1$, $d^2x = d^3x = \ldots\ldots = 0$, on retrouve les anciennes expressions : $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$, etc.

Ainsi, dans l'ancienne manière de parler et d'écrire (c.à.d. quand on spécifie la variable indépendante), on a une expression différentielle isobare pour représenter la dérivée. — Il est facile de la ramener à sa véritable forme en faisant partout les substitutions :

$d^2y = y''dx^2$ $d^3y = y'''dx^3$ ... etc

on retrouvera ainsi une expression homogène et isobare en dx, dy, etc. où la variable indépendante sera indéterminée, et qui permettra d'opérer un changement de variable.

Si cette ancienne expression a une signification et une raison d'être dans le cas d'une fonction d'une seule variable, à cause de l'analogie avec la notation différentielle, elle est abusive et ne peut plus se soutenir pour les fonctions de plusieurs variables. — Dans ce cas, on fait nulles les différentielles ~~d.x~~ d'ordre supérieur au premier, et il reste l'ensemble homogène des termes qui ne contiennent que les différentielles 1res.

— Application de la notation différentielle ~~dans le cas~~ au changement de variables dans le cas de plusieurs variables indépendantes. — On vient de voir que cette notation peut servir à substituer une variable indépendante à une autre. Supposons maintenant qu'on veuille substituer à n variables $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ n variables nouvelles ; $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$.

La solution de la question résulte immédiatement du théorème fondamental. — Remplaçons x_α par $f_\alpha(y_1, y_2, \ldots\ldots y_n)$ puis dx_α par df_α, d^2x_α par d^2f_α, etc.
La fonction primitive ; $F(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ devient

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots\ldots y_n)$$

Partons de la différentielle p^e de Φ développée. Les coefficients des monômes produits des différentielles premières sont, à part les constantes numériques, les dérivées de Φ par rapport à $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$. Cela posé, considérons les éq :

$$dx_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_2} dy_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_n} dy_n$$

Si l'on en tire les valeurs des dy en fonction des dx, et qu'on les porte dans la différentielle de Φ, à la place de

$d^p\Phi$ en fonction de $(dy_1 - dy_n, d^2y_1 - d^2y_n \ldots\ldots d^{(p)}y_1 - d^{(p)}y_n)$

on aura un polynôme en $(dx_1 - dx_n, d^2x_1 - d^2x_n \ldots\ldots d^{(p)}x_1 - d^{(p)}x_n)$ qui est la différentielle p^e de F : $d^{(p)}F$.
Les coefficients des monômes seront les dérivées de F par rapport à $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$. En égalant ces dérivées aux coefficients transformés qu'on aura obtenus en exprimant les dérivées de Φ par rapport aux y en fonction des x, on aura toutes les dérivées de F par rapport aux x en fonction des dérivées des Φ par rapport aux y, et le changement de variables sera opéré.

Ces calculs assez longs se font souvent par parties séparées – On applique d'abord cette méthode à la différentielle 1e; puis on passe au calcul des dérivées 2es, en partant des différentielles secondes. Mais alors les dérivées 2es de Φ par rapport aux y ne figurent que dans les termes en dy^2; et les dérivées 2es de F par rapport aux x ne figurent que dans les termes en dx^2.

– L'identité : $d^{(p)}\Phi = d^p F$ a lieu quelles que soient les valeurs des variables, pourvu qu'elles satisfassent, d'une part, les équations de transformation, et d'autre part, les relations qui unissent leurs différentielles. Cette identité subsistera donc si dans ces dernières relations on suppose que les différentielles des x d'ordre supérieur à 1 sont nulles. Dans l'identité : $d^p\Phi = d^p F$ on éliminera les dy au moyen des équations qui les lient aux dx, en y faisant $d^2x_\alpha = d^3x_\alpha = \ldots\ldots = 0$.

Le résultat restant toujours identique. Dans le 2e membre resteront les monômes en $dx_1, dx_2, \ldots\ldots dx_n$, qui ont pour coefficients les dérivées p^{es} de F par rapport aux y. Égalant ces coefficients à ceux du 1er membre, on aura l'expression de ces dérivées.

<u>Exemple</u> : Soit $z = f(x,y)$ $\quad x = \rho\cos\omega \quad y = \rho\sin\omega$.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial z}{\partial \omega}d\omega$$

Éliminons $d\rho$ et $d\omega$ en les tirant des équations différentielles :

$$\begin{cases} dx = d\rho \cos\omega - \rho \sin\omega \, d\omega \\ dy = d\rho \sin\omega + \rho \cos\omega \, d\omega \end{cases} \qquad \begin{aligned} d\rho &= dx \cos\omega + dy \sin\omega \\ d\omega &= \frac{1}{\rho}(-\sin\omega \, dx + \cos\omega \, dy) \end{aligned}$$

on a alors : $dz = \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\cos\omega - \frac{1}{\rho}\sin\omega\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\sin\omega + \frac{1}{\rho}\cos\omega\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)dy$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

En égalant les coefficients des 2 membres de cette identité, on a :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \rho}\cos\omega - \frac{1}{\rho}\sin\omega\frac{\partial z}{\partial \omega} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \rho}\sin\omega + \frac{1}{\rho}\cos\omega\frac{\partial z}{\partial \omega}$$

Prenons de même les 2 différentielles secondes :

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y \qquad (A)$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}d\rho^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \omega}d\rho\,d\omega + \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2}d\omega^2 + \frac{\partial z}{\partial \rho}d^2\rho + \frac{\partial z}{\partial \omega}d^2\omega \qquad (B)$$

Calculons les différentielles secondes de x et y en fonction des différentielles de ρ et ω :

$$d^2x = d^2\rho\cos\omega - \rho\sin\omega\,d^2\omega + (-\sin\omega\,d\rho - \rho\cos\omega\,d\omega)d\omega - d\rho\sin\omega\,d\omega$$

$$= d^2\rho\cos\omega - \rho\sin\omega\,d^2\omega - 2\sin\omega\,d\rho\,d\omega - \rho\cos\omega\,d\omega^2$$

$$d^2y = d^2\rho\sin\omega + \rho\cos\omega\,d^2\omega + (\cos\omega\,d\rho - \rho\sin\omega\,d\omega)d\omega + d\rho\cos\omega\,d\omega$$

$$= d^2\rho\sin\omega + \rho\cos\omega\,d^2\omega + 2\cos\omega\,d\rho\,d\omega - \rho\sin\omega\,d\omega^2$$

Nous résoudrons ces éq. par rapport à $d^2\rho$ et $d^2\omega$. Si on leur substitue leurs valeurs en fonction de (dx, dy, d^2x, d^2y), dans (B) on rendra ce membre identique à (A.) On pourra alors égaler les coefficients, ce qui donnera ~~d^2x, d^2y~~ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
L'identité subsiste d'ailleurs si d^2x, d^2y sont nuls.

Application. Formule du rayon de courbure d'une section normale menée par le point qui correspond aux paramètres u et v ; si l'on fait u et v fonctions d'un seul paramètre arbitraire t, ces 2 paramètres déterminent ensemble une certaine courbe de la surface et à chaque valeur de t correspond un point déterminé. Si en ce point on mène la tangente à la courbe et la section normale passant par cette tangente, on a pour l'expression du rayon de courbure de cette section normale au point t :

$$\frac{R}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}{E'u'^2+2F'u'v'+G'v'^2} \qquad u', v' \text{ dérivées par rapp. à } t.$$

Si l'on égale le dénominateur à 0, on forme l'équation des lignes asymptotiques. Si l'on cherche le maximum ou le minimum de la fraction du 2e degré en u', v', on obtient les équations différentielles des lignes de courbure de la surface

Équations différentielles.

On appelle équation différentielle ordinaire à une seule fonction inconnue y une équation de la forme :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Intégrer une équation différentielle à une inconnue, c'est trouver toutes les fonctions qui, substituées à y dans le 1er membre de cette équation, la rendraient identiquement nul, quel que soit x.

Quand on a plusieurs fonctions d'une même variable indépendante, on a en général autant d'équations différentielles où entrent ces fonctions et leurs dérivées ; elles forment alors un système.

Dans le cas d'une seule fonction inconnue, l'ordre de la plus haute dérivée contenue dans l'éq. est l'ordre même de l'équation.

Les équations différentielles du 1er ordre sont de la forme :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

La connaissance d'une relation de ce genre entre une variable x et une fonction y est souvent fort utile pour découvrir les propriétés et la forme de cette fonction.

Exemple : On a appris en trigonométrie que si l'on pose $\cos a = x$, l'expression de $\cos ma$ est un polynôme du degré

m en x. Plus généralement, les expressions de

$\sin(m \operatorname{arc} \cos x)$ $\qquad$ $\cos(m \operatorname{arc} \cos x)$

$\sin(m \operatorname{arc} \sin x)$ $\qquad$ $\cos(m \operatorname{arc} \sin x)$

sont des polynômes entiers ou multipliés par ~~ou en~~ $\sqrt{1-x^2}$, en x, du degré m. Ce sont les racines d'une équation différentielle du 2e ordre :

$y = \cos(m \operatorname{arc} \cos x)$ $\qquad$ $\sqrt{1-x^2}\, y' = m \sin(m \operatorname{arc} \cos x)$

$\left(\sqrt{1-x^2}\, y'\right)' = -\dfrac{m^2 y}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\sqrt{1-x^2}\, y'' - 2y' + m^2 y = 0$

Si dans cette équation on remplace y par une des 4 expressions énumérées ci-dessus, elle est satisfaite identiquement quel que soit x. — On peut obtenir le développement de ces expressions. La forme explicite de y est un polynôme entier en x :

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots\ldots$$

Si on le substitue à y dans l'équation différentielle, le 1er membre devient un polynôme entier en x ; pour qu'il soit identiquement nul, il faut que tous les coefficients soient nuls. On a ainsi des équations qui permettent de déterminer tous les coefficients a_0, a_1, a_2 en fonction d'un seul. Mais cela ne suffit pas pour connaître entièrement la forme du polynôme. Il reste à déterminer le 1er coefficient, qui est arbitraire, par une autre méthode. On emploie par ex. la formule de Moivre :

$$\cos ma + i \sin ma = (\cos a + i \sin a)^m$$

et on la développe puis on égale entre eux les termes indépendants

et les coefficients de i ; on reconnaît que le coefficient de x^m ou $(\cos a)^m$ est égal à la somme des coefficients du binôme de 2 en 2, c.à.d. 2^{m-1}. Le premier terme du polynôme est donc :

$$2^{m-1} x^m$$

Les autres coefficients se détermineront à l'aide de celui-là.

– Si l'on remplace y par $z\sqrt{1-x^2}$, on aura des polynômes z entiers en x ; on en calculera un par la méthode précédente, et on obtiendra tous les autres au moyen du premier.

– Si l'on cherche la dérivée m^e de $\arcsin x$, on trouve un polynôme divisé par $\sqrt{1-x^2}$. On cherche alors à annuler le numérateur de cette fraction.

Les puissances de e^{x^2} sont égales à e^{x^2} multiplié par un certain polynôme ; on trouve facilement une éq. différentielle entre les termes du polynôme, pris deux à deux.

– On peut former des équations différentielles de la façon suivante. Considérons, pour nous exprimer géométriquement, une famille de courbes planes ayant un paramètre arbitraire :

$$F(x, y, a) = 0.$$

Si l'on fixe a, on a une courbe déterminée ; y est une fonction de x, et la dérivée de F est :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

On peut éliminer a entre ces 2 équations, et l'on a l'équation

différentielle: $\varphi(x, y, y') = 0$

Si l'on tire y de l'équation de la courbe, qu'on en prenne la dérivée y' et qu'on porte ces valeurs dans φ, cette dernière équation est satisfaite identiquement quels que soient x et a. Il y a donc une infinité de y (et conséquemment de a) qui satisfont la 1e équation, et par suite aussi la dernière. On dit que l'équation F est l'intégrale générale de l'éq. différentielle φ. Toutes les solutions de $\varphi = 0$ seront obtenues (sauf exceptions) en résolvant $F = 0$ par rapport à y.

— Si l'on a ~~deux~~ 2 constantes arbitraires, l'éq. prend la forme:

$$F(x, y, a, b) = 0.$$

On aurait y en fonction de x en fixant a et b. Les dérivées sont:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0$$

Si on élimine les paramètres a et b entre ces 3 éq. on a l'éq. différentielle: $\psi(x, y, y', y'') = 0$ (du 2e ordre)

L'équation F donne toutes les racines de l'éq ψ (sauf exceptions). C'est l'intégrale générale de l'éq. différentielle du 2e ordre ψ: on voit qu'elle contient 2 constantes arbitraires. La loi est manifestement générale; pour éliminer n paramètres arbitraires, il faut n équations différentielles, et la dernière, qui ne contient plus que x et y, est du n^e ordre.

Exemples. I. V étant une fonction de x, nous lui ajoutons une constante arbitraire C ; on a une infinité de fonctions : $$y = V + C.$$
Leur dérivée commune est : $$y'_x = V'_x.$$
La constante se trouve éliminée. — Inversement, pour intégrer une fonction : $$y' = V'$$
il faut trouver ~~la~~ une fonction dont la dérivée soit V', par ex. V, et lui ajouter une constante arbitraire pour avoir toutes les fonctions primitives y :
$$y = V + C.$$

II. Considérons les fonctions : $$y = \lambda U + V.$$
où la constante arbitraire λ entre en facteur linéaire ; U et V étant des fonctions de x. La dérivée par rapp. à x est :
$$y' = \lambda U' + V'$$
Eliminons λ :
$$(y - V)U' - (y' - V')U = 0$$
ou :
$$y'U - yU' + VU' - UV' = 0$$
Cette équation est de la forme : $$y' + Ay + B = 0$$
On l'appelle équation différentielle linéaire du 1er ordre.
— Inversement, étant donnée une fonction linéaire de ce genre, on peut chercher une fonction $$\lambda U + V$$
~~qui~~ telle que λ étant arbitraire, cette fonction substituée à y dans l'éq. différentielle la satisfasse identiquement.

Les coefficients A et B sont des fonctions de x dont l'expression est :

$$A = -\frac{U'}{U} \qquad B = \frac{VU' - UV'}{U}$$

La 1e formule détermine U, puisque sa dérivée logarithmique est égale à $-A$: $U = e^{-\int A dx}$

Connaissant U, on peut obtenir la valeur de V :

$$\frac{B}{U} = \frac{VU' - UV'}{U^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{V}{U}\right) \qquad V = -U\int \frac{B}{U} dx$$

$$V = -e^{-\int A dx}\int B e^{\int A dx} dx$$ d'où l'intégrale générale :

$$y = -e^{-\int A dx}\left[-\lambda + \int B e^{\int A dx} dx\right]$$

Il est inutile d'écrire la constante λ, car on a déjà dans la 2e intégrale une constante arbitraire ; donc :

$$y = -e^{-\int A dx}\int B e^{\int A dx} dx$$

Il semble qu'il y ait encore là 2 constantes arbitraires, mais la constante de l'exposant de e ~~est~~ donne lieu à un facteur (e^P) qui multiplie le second e et divise le 1er ; elle est donc éliminée, et il ne reste que la constante de la 2e intégrale : $\int B e^{\int A dx} dx$

— Autre moyen d'intégrer l'éq : $y' + Ay + B = 0$.

Multiplions tous les termes par $e^{\int A dx}$:

$$y' e^{\int A dx} + A e^{\int A dx} y = -B e^{\int A dx}$$

Le 1er membre est la dérivée de $y e^{\int A dx}$ par rapport à x ;

donc : $y e^{\int A dx} = -\int B e^{\int A dx} dx$ / $y = -e^{-\int A dx} \int B e^{\int A dx} dx$

Exemple. Soit l'équation différentielle de 2 coniques homofocales :

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1 \quad \text{On en tire :} \quad \frac{x}{a^2+\lambda} + \frac{yy'}{b^2+\lambda} = 0$$

$$\frac{a^2+\lambda}{x} = \frac{b^2+\lambda}{-yy'} = \frac{a^2-b^2}{x+yy'} = \frac{c^2}{x+yy'}$$ Éliminons λ :

$$a^2+\lambda = \frac{c^2 x}{x+yy'} \qquad b^2+\lambda = \frac{-c^2 yy'}{x+yy'}$$ L'équation différentielle devient :

$$\frac{x(x+yy')}{c^2} - \frac{y(x+yy')}{c^2 y'} = 1 \qquad \left[x - \frac{y}{y'} = \frac{c^2}{x+yy'}\right]$$

$$(x+yy')(xy'-y) = c^2 y' \qquad xyy'^2 + (x^2-y^2-c^2)y' - xy = 0$$

Par chaque point (x, y) du plan passent 2 coniques homofocales. L'équation précédente, du 2e degré en y', fournit les coefficients angulaires de ces 2 coniques ; or on voit que le produit de ses racines est égal à -1. On retrouve ainsi la propriété que les coniques homofocales ont d'être orthogonales.

– Il est difficile d'intégrer cette équation. Les coordonnées tangentielles sont ici plus commodes pour l'intégration que les coordonnées cartésiennes. Soit une droite ayant pour éq :

$$ux + vy = 1$$

L'équation qui exprime que cette dr. est tangente à une conique est de la forme :

$$(a^2+\lambda)u^2 + (b^2+\lambda)v^2 = 1$$

Dans cette éq. λ n'entre pas linéairement : $y = \lambda U + V$.
Nous allons ramener cette éq. tangentielle à la forme linéaire.
Considérons v comme fonction de u ; un p. de la conique sera défini par les 2 éq :

$$\begin{cases} ux + vy = 1 \\ x + v'y = 0 \end{cases}$$ [v' dérivée par rapport à u.]

d'où l'on tire ;

$$\frac{x}{v'} = \frac{y}{-1} = \frac{1}{uv'-v} \qquad x = \frac{v'}{uv'-v} \qquad y = \frac{-1}{uv'-v}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} = y'$$ (coefficient angulaire de la droite tangente)

Ces formules nous permettent d'effectuer la transformation des coordonnées ponctuelles en coordonnées tangentielles.

$$x + yy' = \frac{v'}{uv'-v} + \frac{u}{v}\,\frac{1}{uv'-v} = \frac{vv'+u}{v(uv'-v)}$$

$$xy' - y = \frac{-v'u}{(uv'-v)v} + \frac{v}{(uv'-v)v} = \frac{-1}{v}$$ (On néglige ici l'hypothèse oiseuse : $uv' - v = 0$.)

L'équation différentielle devient alors :

$$\frac{vv'+u}{v^2(uv'-v)} = \frac{c^2u}{v} \qquad vv' + u = c^2uv(uv'-v)$$

$$vv'(1-c^2u^2) + c^2uv^2 + u = 0$$

Cette équation n'est pas encore linéaire, mais elle le deviendra si l'on prend pour nouvelle inconnue $v^2 = V$.

$$vv' = \frac{V'}{2} \qquad (1-c^2u^2)V' + 2c^2uV + 2u = 0 \qquad \text{ou :}$$

$$V' + \frac{2c^2u}{1-c^2u^2}V + \frac{2u}{1-c^2u^2} = 0$$

Telle est l'équation linéaire cherchée, que nous pouvons intégrer

Pour cela multiplions-en les 2 membres par : $e^{\int \frac{2c^2u\,du}{1-c^2u^2}}$

l'intégrale qui forme l'exposant de e est égale à :

$$-L(1-c^2u^2) = L\frac{1}{1-c^2u^2}$$ ce qui donne :

$$e^{\int \frac{2c^2u\,du}{1-c^2u^2}} = e^{L\frac{1}{1-c^2u^2}} = \frac{1}{1-c^2u^2}$$ et l'éq. devient :

$$\frac{V'}{1-c^2u^2} + \frac{2c^2u}{(1-c^2u^2)^2}V + \frac{2u}{(1-c^2u^2)^2} = 0$$

Or les 2 premiers termes sont la dérivée de $\frac{V}{1-c^2u^2}$

qui est égal à : $\int \frac{-2u\,du}{(1-c^2u^2)^2}$

Tout revient à effectuer cette dernière intégrale. Posons :

$u^2 = U$; l'intégrale devient :

$$-\int \frac{dU}{(1-c^2U)^2} = \frac{1}{1-c^2U} \times \frac{1}{c^2} + K$$ Donc :

$$V = (1-c^2u^2)\left(K + \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{1-c^2u^2}\right)$$ ou :

$$v^2 = \frac{1}{c^2} + K(1-c^2u^2)$$

Cette intégrale est de la forme : $(a^2+\lambda)u^2 + (b^2+\lambda)v^2 = 1$

On pourrait chercher la relation entre K et λ qui rendrait ces 2 équations identiques.

Signalons en passant qu'on intègre de la même manière l'équation différentielle des projections sur le plan (x, y) des lignes de courbure d'un ellipsoïde rapporté à ses axes principaux.

L'équation linéaire: $y' + Ay + B = 0$

se ramène aisément l'équation de la forme suivante:

(Équation de Bernouilli) $y' + Ay + By^n = 0$ Divisons en effet par y^n:

$\frac{y'}{y^n} + \frac{A}{y^{n-1}} + B = 0$ Prenons pour inconnue $\frac{1}{y^{n-1}} = u$,

on a: $u' = -(n-1)y^{-n}y' = -(n-1)\frac{y'}{y^n}$

L'équation prend alors la forme linéaire:

$-\frac{u'}{n-1} + Au + B = 0$ $u' - (n-1)Au - (n-1)B = 0$.

L'intégrale est: $u = e^{n-1\int A dx} \int (n-1) B e^{-(n-1)\int A dx} dx$

d'où l'on déduirait aisément celle de y.

— Nous avons vu que l'élimination de la constante λ entre la fonction $y = \lambda U + V$ et sa dérivée donnait lieu à une équation linéaire. Examinons le cas plus complexe d'une fonction: $y = \frac{\lambda U + V}{\lambda U_1 + V_1}$

U, V, U_1, V_1, étant des fonctions de x.

Éliminons λ entre la fonction y et sa dérivée, nous aurons une équation différentielle. Résolvons l'éq. en y par rapport à λ, puis prenons les dérivées par rapport à x (celle de λ sera nulle, et λ se trouvera ainsi éliminée):

$\lambda = \frac{V - V_1 y}{U_1 y - U}$ ou $-\lambda = \frac{V_1 y - V}{U_1 y - U}$

Prenons les dérivées; pour cela il suffit d'égaler à 0 ~~la dérivée~~ le ~~du~~ numérateur de la dérivée de l'expression de $-\lambda$:

$$(U_1 y - U)(V_1' y - V' + V_1 y') - (V_1 y - V)(U_1' y - U' + U_1 y') = 0$$

Le terme en yy' disparaît dans le développement. L'équation développée sera mise sous la forme suivante :

$$y' + Ay + By^2 + C = 0$$

A, B, C étant des fonctions de x. C'est un cas particulier de l'équation de Riccati : $y' = Ay^2 + Bx^m$

On peut se demander si inversement l'intégrale d'une telle équation est de la forme : $y = \dfrac{\lambda U + V}{\lambda U_1 + V_1}$,

On n'a pas le moyen d'intégrer l'équation générale :

$$y' + Ay + By^2 + C = 0$$

Mais on en connaît une propriété remarquable, à savoir :

On peut intégrer une équation de Riccati quand on en connaît une solution.

Supposons que u soit une fonction de x qui vérifie l'éq. de Riccati, on aura : $u' + Au + Bu^2 + C = 0$

~~Développons et retranchons membre à membre~~ Posons : $y = u + v$, u étant connu et v inconnu. L'éq. devient :

$$u' + v' + A(u+v) + B(u+v)^2 + C = 0$$

Développons et retranchons membre à membre la 1e de la 2e :

$$v' + Av + 2Buv + Bv^2 = 0 \qquad v' + (A + 2Bu)v + Bv^2 = 0$$

Nous savons intégrer cette équation en prenant pour inconnue $\frac{1}{v} = w$. On a alors l'équation :

$-w' + (A+2Bu)w + B = 0$ $\qquad w' - (A+2Bu)w - B = 0.$

d'où l'on tire l'intégrale :

$$w = e^{\int (A+2Bu)dx} \int B e^{\int -(A+2Bu)dx} dx$$

On sait que la constante arbitraire qui figure dans l'exposant de e se détruit : — v est l'inverse de cette intégrale et on a la valeur de y :

$$y = u + \frac{1}{e^{\int (A+2Bu)dx} \int B e^{\int -(A+2Bu)dx} dx}$$

La constante λ figurera linéairement au numérateur et au dénominateur de la fraction qui exprime y. Donc, si l'on connaît une solution u de l'éq. de Riccati, on peut en obtenir l'intégrale générale y.

Signalons une propriété analytique de cette équation — Considérons la forme de son intégrale générale $\dfrac{\lambda U + V}{\lambda U_1 + V_1}$ et soient $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ 4 solutions distinctes de l'éq. différ. correspondant aux 4 valeurs numériques $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$ de la constante arbitraire λ. Considérons le rapport anharmonique des 4 solutions y ; on voit que

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}$$

C'est donc une constante. Si l'on connaissait 3 solutions particulières de l'équation, on pourrait avoir son intégrale générale, car on pourrait calculer une 4e solution au moyen du rapport anharmonique constant.

— On peut intégrer autrement l'équation de Riccati :

$$y' + Ay + By^2 + C = 0$$

Supposons qu'on ait remplacé successivement y par y_1 y_2 y_3 y_4 : Entre les 4 équations ainsi obtenues on éliminera A, B, C, et on aura le déterminant :

$$\begin{vmatrix} y'_1 & y_1 & y_1^2 & 1 \\ y'_2 & y_2 & y_2^2 & 1 \\ y'_3 & y_3 & y_3^2 & 1 \\ y'_4 & y_4 & y_4^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Si nous prenons la dérivée du rapport anharmonique

$$\frac{(y_3 - y_1)(y_4 - y_2)}{(y_3 - y_2)(y_4 - y_1)}$$

le déterminant est, au signe près, le numérateur de la dérivée.

Nous allons indiquer quelques types d'équations du 1er ordre qu'on sait intégrer. Voici le principe général sur lequel reposent toutes ces intégrations :

11e

Supposons que l'équation différentielle soit mise sous la forme :

$$\varphi(y)\, y' + \psi(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(y)\, dy + \psi(x)\, dx = 0$$

on dit que les variables sont séparées. L'intégrale générale sera : $\Phi(y) + \Psi(x) = C$ ou $\int_{y_0}^{y} \varphi(y)\, dy + \int_{x_0}^{x} \psi(x)\, dx = C$

Le problème de l'intégration de l'éq. diff du 1er ordre est donc ramené à une séparation des variables.

1° Cas où l'équation ne contient que y'. On en tire aussitôt une valeur déterminée de y' :

$$y' = A_1 \quad \text{ou} \quad dy = A_1 dx \qquad y = A_1 x + C$$

2° Cas où l'équation ne contient que y' et x ; on a :

$$y' = f(x)$$

C'est le problème des quadratures ; il faut chercher la fonction primitive de $f(x)$. Dans certains cas, cette ~~réso~~ intégration peut être illusoire — On résoudra alors l'éq. par rapport à x, qu'on aura en fonction de y'. En général, l'éq :

$$\Phi(x, y') = 0$$

peut être obtenue en éliminant t entre les 2 équations :

$$x = \varphi(t) \qquad y' = \psi(t)$$

il suffirait de faire $y' = t$, et on aurait $x = \varphi(y')$.

Il est naturel de prendre t pour variable indépendante

$$\frac{dy}{dx} = \psi(t) \qquad 1 = \varphi'(t)\frac{dt}{dx} \qquad \frac{dy}{dt} = \psi(t)\varphi'(t)$$

Intégrons : $x = \varphi(t)$, $y = \int_{t_0}^{t} \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C$

Ces 2 équations représentent l'intégrale générale de Φ ; elles définissent y en fonction de x ; la constante disparaît quand on élimine t entre ces 2 équations.

3° Cas où l'équation ne contient que y' et y :

$$\Phi(y, y') = 0$$

Résolvons cette équation par rapport à y' :

$$y' = \varphi(y)$$

ce qui donne :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y) \qquad \frac{dy}{\varphi(y)} = dx$$

Les variables sont séparées. Intégrons :

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = x + C$$

Supposons encore que y et y' soient fonctions de t.

$$y = f(t) \qquad y' = \psi(t)$$

$$dy = f'(t)\,dt \qquad dy = \psi(t)\,dx \qquad dx = \frac{f'(t)}{\psi(t)}\,dt$$

Intégrons : $y = f(t)$, $x = \int \frac{f'(t)}{\psi(t)}\,dt + C$

Ces 2 équations représentent l'intégrale générale de Φ.

4° Cas où l'on a une équation homogène entre x et y : on peut la mettre sous la forme $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

Il est naturel de prendre pour inconnue $\frac{y}{x} = u$; posons $y = ux$.

Prenons la dérivée (par rapp. à x) : $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$

$$x\,du + u\,dx = \varphi(u)\,dx \qquad \frac{du}{\varphi(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

Les variables sont séparées. Intégrons :

$$\int \frac{du}{\varphi(u)-u} = ~~\frac{x}{C}~~ \log x - \log C$$

On a donc le système :

$$y = ux, \qquad x = ~~C \int_0^u \frac{du}{\varphi(u)-u}~~ \; C e^{\int_0^u \frac{du}{\varphi(u)-u}}$$

Ces 2 équations représentent l'intégrale de l'équation homogène.

— *Exemple.* Appliquons cette méthode à l'équation :

$$(ax+by)\,dx + (a'x+b'y)\,dy = 0$$

Posons $y = ux$ $\quad (a+bu)~~x~~\,dx + (a'+b'u)(u\,dx + x\,du)~~x~~ = 0$.

D'où l'éq. entre x et u : $dx\left[(a+bu) + (a'+b'u)u\right] + du\,(a'+b'u)\,x = 0$.

$$\frac{dx}{x} + \frac{a'+b'u}{a+bu+(a'+b'u)u}\,du = 0$$

Intégrons :

$$\log Cx + \int \frac{(a'+b'u)\,du}{a+(a'+b)u+b'u^2} = 0.$$

— On peut encore ramener à ce type l'équation :

$$(ax+by+c)\,dx + (a'x+b'y+c)\,dy = 0.$$

Soient x_0, y_0 les coordonnées du p. d'intersection des 2

droites : $ax+by+c=0$, $\quad a'x+b'y+c'=0$

on fait : $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$,

et l'équation se trouve ramenée au type précédent :

$$(a\xi + b\eta)\,d(x_0+\xi) + (a'\xi + b'\eta)\,d(y_0+\eta) = 0.$$

Quand les 2 droites sont parallèles, on a :

$$\lambda(ax+by+c) + \mu = a'x+b'y+c'$$

On prend alors $(ax+by+c)$ pour fonction inconnue ; l'équation prend la forme linéaire. Solutions singulières.

— Supposons qu'on ait l'équation différentielle :

$$f(x,y,y') = 0$$

obtenue en éliminant la constante a entre l'équation

$$\varphi(x,y,a) = 0$$

et l'éq. obtenue en prenant la dérivée par rapport à x :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\, y' = 0$$

On obtient les intégrales particulières de f en donnant à $\underline{a}$ des valeurs particulières dans $\varphi(x,y,a)=0$. Mais on peut former une intégrale de f qu'on ne peut trouver en donnant à $\underline{a}$ une valeur déterminée : c'est ce qu'on appelle l'intégrale singulière de f.

Supposons que les courbes de la famille représentée par l'éq :

$$\varphi(x,y,a) = 0$$

dient une enveloppe (lieu des points où l'une de ces courbes rencontre la courbe infiniment voisine) On considère 2 courbes voisines : $\varphi(x, y, a) = 0$ $\varphi(x, y, a+h) = 0$

Leur point d'intersection est déterminé par ce système. On peut d'ailleurs remplacer la 2e de ces éq. par ex. par

$$\varphi(x, y, a+h) - \varphi(x, y, a) = 0$$

Celle-ci aura pour limite de son 1er membre la dérivée de φ par rapport à a ; donc le point d'inters. de 2 courbes infiniment voisines a pour équations :

$$\varphi(x, y, a) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial a} = 0.$$

Pour que ce raisonnement soit valable, il faut que φ soit une fonction univoque, car si elle pouvait recevoir diverses déterminations, les courbes de paramètres a et $a+h$ pourraient n'être pas infiniment voisines quand h tend vers 0. Si l'on avait résolu $\varphi(x, y, a) = 0$ par rapport à a, on aurait ; $a = \psi(x, y)$ d'où l'égalité : $1 = 0$, résultat absurde.

\+ L'enveloppe est tangente à ~~la~~ une courbe enveloppée en chacun de ses points. En effet, l'éq : $\varphi(x, y, a) = 0$ peut représenter l'enveloppe, si $\underline{a}$ y est considéré comme la fonction obtenue en résolvant l'éq : $\frac{\partial\varphi}{\partial \alpha} = 0$ par rapport à a.

Considérons un p. (x, y) commun à une courbe et à

son enveloppe. L'équation de la tangente à la courbe en ce p. sera :

$$(X-x)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

Prenons les dérivées partielles de $\varphi(x, y, z)$ dans les 2 cas de l'enveloppe et de l'enveloppée : ds le 1er a est constant, ds le 2e a est fonction de x, y, z : $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$; $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z}$

or $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$ ~~est nul~~ pour ce point ; donc les 2 séries de dérivées sont ~~égales~~ identiques ce qui montre que les 2 courbes sont tangentes.

L'équation de l'enveloppe définit y en fonction de x. Pour chaque point de la courbe et de l'enveloppe x, y, y' ont la même valeur ; donc $f(x, y, y')$ a la même valeur. Cette dernière fonction, quand elle représente l'enveloppe donne lieu à une intégrale singulière. Cette solution n'est pas comprise dans les intégrales particulières, car dans cette dernière fonction a est une fonction de x, y, tandis que dans les éq. différentielles des courbes enveloppées a est une constante arbitraire. — Ainsi l'intégrale singulière représente l'enveloppe des diverses courbes représentées par les intégrales particulières. (Il y a d'ailleurs des cas où l'intégrale singulière ne correspond pas à une enveloppe.)

Application. Soit à trouver les courbes telles que le produit des distances de leurs tangentes à 2 p. fixes soit constant.

On peut former l'éq. différentielle et l'intégrer sans calcul.

La propriété considérée appartient aux tangentes de la courbe. Une quelconque de ces tangentes dépend d'un paramètre qui fixe son point de contact. Regardant ce paramètre comme constant, on aura l'équation de la tangente. La courbe étant l'enveloppe de ses tangentes, sera représentée par l'intégrale singulière de l'éq. différentielle des tangentes.

En général, quand on cherche une courbe jouissant d'une certaine propriété et que l'on peut attribuer cette propriété à une famille de courbes dont la courbe cherchée serait l'enveloppe, celle-ci sera donnée par l'intégrale singulière de l'équation générale de la famille de courbes.

— Soit par ex. à trouver une courbe telle que tout cercle qui la touche passe par un p. fixe A et ait un rayon constant. La courbe sera l'enveloppe des cercles passant par A et ayant un rayon constant ; c'est la circonférence décrite du p. A comme centre avec un rayon double.

12e — On peut encore ramener aux quadratures les éq. de la forme : $px + qy + r = 0$

p, q, r, étant des fonctions de y'. On peut mettre ces éq. sous cette autre forme : $y = x\varphi(y') + \psi(y')$

Considérons la droite : $y = ux + v$,

v étant fonction de u u est le coefficient angulaire de la

droite ; or, si cette droite est tangente à la courbe précédente on a : $u = y'$. y' est la variable indépendante.
Le point où la droite touche son enveloppe a pour coordonnées : x et y. Prenons les dérivées de l'éq. de la droite ~~successivement~~ par rapport à u : $0 = x + v'$

D'où ; $x = -v'$ $y = ux + v = v - uv'$ $\left(v' = \frac{dv}{du}\right)$

Or : $\frac{dy}{dx} = y' = u$

Portons ces valeurs dans l'équation, elle devient :

$-pv' + q(v - uv') + r = 0$ $v'(p + uq) - vq = r$

équation linéaire où l'on a : $A = \frac{-q}{p+uq}$ $B = \frac{-r}{p+uq}$

$$v = e^{\int \frac{q\,du}{p+uq}} \int e^{-\int \frac{q\,du}{p+uq}} \frac{r\,du}{p+uq}$$

Autre moyen d'intégration. Prenons l'éq. sous la forme :

$y = x\varphi(y') + \psi(y')$

Prenons les dérivées des 2 membres par rapport à y ; l'équation ainsi obtenue, si l'on y regarde y' comme variable indépendante et x comme la fonction inconnue, est une équation linéaire, qu'on peut intégrer sans difficulté. Les équations de ce type s'appellent <u>équations de Lagrange</u>.

Il y a un cas où ce procédé d'intégration est illusoire; c'est quand on a: $p + uq = 0$, ou $\frac{p}{q} = -u$.

Alors: $\varphi(y') = u = y'$, et l'équation devient:

$$y = xy' + \psi(y')$$

Quand on substitue à x et y leurs valeurs en u, v, on a:

$$v - uv' = -uv' + \psi(u) \quad \text{ou} \quad v = \psi(u)$$

v' disparaît; il reste v en fonction de u.

Mais le raisonnement que nous avons fait prouve que la condition nécessaire et suffisante pour que la droite soit enveloppée par la courbe cherchée est que: $v = \psi(u)$

L'équation de la droite est donc: $y = ux + \psi(u)$

La droite aura pour coefficient angulaire u; mais on a aussi pour chaque point de la courbe,

$$y = xy' + \psi(y')$$

y' étant le coefficient angulaire de la courbe en ce point. $y = \psi(u)$ est une valeur qui vérifie l'éq. si u est constante.

La courbe cherchée est donc la solution singulière de l'équation différentielle: $y = x\varphi(y') + \psi(y')$

Donner cette équation, c'est donner une propriété de la courbe, propriété qui définit $\psi(y')$. L'équation de la tangente sera l'intégrale générale de cette équation, et l'équation de la courbe en sera l'intégrale singulière.

Considérons l'équation : $y = xy' + \psi(y')$

Prenons les dérivées par rapport à x :

$$y' = xy'' + y' + \psi'(y')y'' \qquad y''(x + \psi'(y')) = 0$$

Cette éq. a 2 solutions ; $y'' = 0$, $\quad x = -\psi'(y')$.

Si $y'' = 0$, $y' =$ constante, d'où l'intégrale générale

$$y = ux + \psi(u)$$ qui donne la tangente variable.

$x = -\psi'(y') \quad y = -y'\psi'(y') + \psi(y')$

Ce système de 2 équations définit l'enveloppe de la droite représentée par l'éq ; $y = xy' + \psi(y')$ quand on y regarde y' comme un paramètre variable.

— Problème pouvant se résoudre par une équation différentielle du 1er ordre.

Etant donnée une famille de courbes dont l'équation est :

$$\varphi(x, y, a) = 0$$

On demande les trajectoires orthogonales de ces courbes, c.à.d. toutes les courbes qui rencontrent normalement toutes les premières. (plus généralement, les trajectoires obliques, c.à.d. toutes les courbes qui coupent les premières sous un angle constant.)

Considérons une des courbes données ; soient x, y, ses coordonnées. Les coordonnées de la trajectoire orthogonale cherchée sont égales à celles de cette courbe au point où elles se coupent ;

$x = x_1 \qquad y = y_1$

Les coefficients angulaires des 2 courbes en ce point étant y', y'_1, on a la relation : $y'y'_1 = -1$. $y' = -\dfrac{1}{y'_1}$

D'autre part, y' est définie par les équations :

$$\varphi(x, y, a) = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$$

Celle-ci devient : $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{1}{y'_1} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$

D'ailleurs, $y_1 = y$ au point considéré. Donc, si l'on considère un p. quelconque (x, y) d'une des trajectoires cherchées, on devra avoir les relations :

$$\varphi(x, y, a) = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{y'} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

En éliminant a, on aura une équation de la forme :

$$F(x, y, y') = 0$$

qui devra être vérifiée par les coordonnées d'un p. quelconque des courbes cherchées et par le coefficient angulaire d'une de ces courbes en ce point.

Or, si l'on élimine $\underline{a}$ entre les 2 éq. des courbes données :

$$\varphi(x, y, a) = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y' \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

on a l'équation différentielle du faisceau de ces courbes ;

$$\Phi(x, y, y') = 0$$

dont l'intégrale est $\varphi(x, y, a) = 0$. Donc l'équation

F peut s'obtenir en remplaçant dans Φ y' par $-\frac{1}{y'}$.

Règle. Pour former l'équation différentielle des trajectoires orthogonales à un faisceau de courbes, il suffit de former l'éq. différentielle de ce faisceau ~~et~~ et d'y faire $y' = -\frac{1}{y'}$.

— On obtient d'une manière analogue l'éq. différentielle des trajectoires obliques.

Soit le point (x_1, y_1) On a entre les coefficients angulaires des 2 courbes la relation : $\frac{y'_1 - y'}{1 + y'y'_1} = b$

ou $y' = \frac{y'_1 - b}{1 + b y'_1}$

b étant la tangente trig. de l'angle constant que les 2 faisceaux de courbes font entre eux (dans le système des coordonnées rectangulaires.)

On éliminera a entre les 2 équations :

$$\varphi(x, y, a) = 0 \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{y' - b}{1 + by'}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

et on aura l'éq. différentielle du faisceau demandé ~~considéré; puis on y remplacera y' par $-\frac{1}{y'}$~~

Exemple. Supposons que l'équation du faisceau :

$$\varphi(x, y, a) = 0$$

soit homogène par rapport à x, y, a. En supposant cette équation résolue par rapport à a, on aurait :

$$a = x\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

On élimine immédiatement a par la dérivation :

$$0 = \psi\left(\frac{y}{x}\right) + x\,\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{xy'-y}{x^2} = \psi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(y' - \frac{y}{x}\right)$$

Remplaçons y' par $-\dfrac{1}{y'}$:

$$0 = \psi\left(\frac{y}{x}\right) - \psi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{y'} + \frac{y}{x}\right)$$

Cette éq. différentielle est homogène en x et en y. Posons : $y = ux$ et regardons u comme une fonction inconnue de x : $y' = u'x + u$. L'équation devient :

$$\psi(u) = \psi'(u)\left(u + \frac{1}{u'x+u}\right) \qquad \frac{1}{u'x+u} = \frac{\psi(u) - u\psi'(u)}{\psi'(u)}$$

$$u'x + u = \frac{\psi'(u)}{\psi(u) - u\psi'(u)} \qquad u'x = \frac{du}{dx}x = \frac{\psi'(u)(1-u^2) - u\psi(u)}{\psi(u) - u\psi'(u)}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{[\psi(u) - u\psi'(u)]\,du}{\psi'(u)(1-u^2) - u\psi(u)}$$

d'où l'intégrale :

$$x = e^{\int \frac{\psi(u) - u\psi'(u)}{\psi'(u)(1-u^2) - u\psi(u)}du}$$

et par suite :

$$y = u\,e^{\int \frac{\psi(u) - u\psi'(u)}{\psi(u)(1-u^2) - u\psi(u)}du}$$

Signalons une autre manière de mettre en équation ce problème, dans le cas d'une courbe dans l'espace.

Supposons que le faisceau de courbes soit déterminé de la façon suivante : x, y, z sont donnés en fonction d'un paramètre u ; pour qu'il y ait un faisceau il faut que

ces fonctions contiennent en outre un paramètre arbitraire v.

$$x = f(u,v) \qquad y = \varphi(u,v) \qquad z = \psi(u,v)$$

Si u et v sont variables en même temps, ces 3 équations définissent une surface; si l'on fait v constante, on détermine une infinité de courbes sur cette surface. Il est clair que les trajectoires orthogonales cherchées seront aussi tracées sur cette surface. On pourra les obtenir en regardant v comme une fonction convenable de u. C'est cette fonction que nous nous proposons de déterminer, de façon que les 3 éq. représentent une trajectoire orthogonale au faisceau des courbes pour lesquelles v est un paramètre constant.

Les dérivées sont par rapport à u:

$$\frac{dx}{du} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{du} \qquad \frac{dy}{du} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{dv}{du} \qquad \frac{dz}{du} = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{dv}{du}$$

Ces 3 dérivées sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la courbe au point considéré. Si l'on regarde v comme constante, elles se réduisent à: $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}$.

Ces 3 dérivées sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la tangente à la ~~trajectoire orthogonale~~ courbe au p. considéré.

Au point d'intersection de la courbe et de la trajectoire orthogonale, les tangentes font un angle droit:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\frac{dv}{du} = 0.$$

ce qui donne l'équation différentielle: $E\,du + F\,dv = 0$.

Si F est identiquement nul, l'équation se réduit à :

$du = 0$, ou u = constante. (si $F = 0$)

Or la variable indépendante n'est pas fixée. Donc les courbes pour lesquelles u ~~est constante~~ sont les trajectoires orthogonales des courbes pour lesquelles v est une constante.

On peut appliquer cette méthode à la recherche des trajectoires orthogonales d'une droite dont l'équation contient un paramètre variable. On a les équations linéaires :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha u \\ y = y_0 + \beta u \\ z = z_0 + \gamma u \end{cases}$$

x, y, z, $\alpha \beta, \gamma$ étant fonctions de v.

Ces 3 équations définissent aussi une surface réglée, si v est un paramètre variable.

Dans un plan, les trajectoires orthogonales ont pour développée l'enveloppe des droites qui composent le faisceau considéré : ce sont les développantes de cette enveloppe. La recherche des développantes ne dépend donc que de quadratures.

13e Équations différentielles d'ordre supérieur au 1er.

Supposons d'abord que dans une équation du 2e ordre y, y' manquent ; cette équation sera : $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)$

On obtiendra y par 2 intégrations successives :

$$\frac{dy}{dx} = \int \varphi(x)\,dx + C \qquad y = \int dx \int \varphi(x)\,dx + Cx + C'$$

En général, quand y manque dans l'éq. différentielle on peut abaisser l'ordre de l'équation d'une unité, c à d. ramener l'intégration à l'intégration d'une éq. de l'ordre immédᵗ inférieur. Il suffira de prendre y' pour fonction inconnue.

Soit par exemple: $f(x, y', y'') = 0$

On peut écrire: $f\left(x, y', \frac{dy'}{dx}\right) = 0$

C'est une éq. différentielle du 1er ordre entre x et y'.

On obtiendra la valeur de y' en fonction de x et d'une constante arbitraire: $y' = \varphi(x, C)$

puis y avec une seconde constante:

$$y = \int \varphi(x, C)\, dx + C'$$

Le raisonnement est général, et la méthode s'applique aux équations différentielles de tous les ordres.

De même, quand x manque, on peut abaisser l'ordre de l'équation différentielle d'une unité. En effet, on peut prendre y' pour fonction inconnue et y pour variable indépendante. On posera: $y' = \frac{dy}{dx} = u$.

On formera alors une éq. différentielle entre y, u, et les dérivées de u par rapport à y. En effet,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(u \frac{du}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(u \frac{du}{dy}\right) u \qquad \text{etc.}$$

On obtiendra ainsi une éq. du degré immédiat^t inférieur.

Par ex. $F(y, y', y'')$ deviendra $F(y, u, u\frac{du}{dy})$

Si l'on peut intégrer, on aura : $u = \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C)$

D'où : $x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C)} + C'$

— On procède quelquefois d'une manière un peu différente.

Supposons qu'on ait l'équation : $y'' = f(y, y')$

On peut multiplier les 2 membres par y' :

$y'y'' = y' f(y, y')$ ou : $\frac{d}{dx}\left(\frac{y'^2}{2}\right) = y' f(y, y')$

Si l'on pose $\frac{y'^2}{2} = v$, on obtient une éq. du 1er ordre entre v et y, d'où l'on tirera y' en fonction de y.

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C)$$

Les calculs sont dès lors les mêmes que précédemment :

$u\frac{du}{dy} = f(y, u)$ le 1er membre est la dérivée de $\frac{u^2}{2}$, d'où l'on tire u en fonction de y.

Application. Soit l'équation : $\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 y$ Chaînette.

Employons le dernier procédé : $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = a^2 y \frac{dy}{dx}$

Le 1er membre est la demi-dérivée de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$; le 2e membre est la demi-dérivée de a^2y^2 ; donc :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2y^2 - C$$

et en intégrant :

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{a^2y^2 - C}} + C'$$

Prenons ay pour variable indépendante ; on écrira :

$$x = \frac{1}{a}\int \frac{day}{\sqrt{a^2y^2 - C}} \qquad ax = L\left(ay + \sqrt{a^2y^2 - C}\right) + ax_0$$

en mettant la constante d'intégration sous la forme ax_0.
Introduisons une constante arbitraire dans le logarithme :

$$a(x - x_0) = L\,\lambda\left(ay + \sqrt{a^2y^2 - C}\right)$$

Choisissons λ de manière qu'on ait :

$$\lambda\left(ay + \sqrt{a^2y^2 - C}\right) \times \lambda\left(ay - \sqrt{a^2y^2 - C}\right) = 1$$

c.à.d. : $\lambda = \frac{1}{\sqrt{C}}$ On a donc l'expression :

$$\frac{ay + \sqrt{a^2y^2 - C}}{\sqrt{C}} = e^{a(x - x_0)} \qquad \frac{ay - \sqrt{a^2y^2 - C}}{\sqrt{C}} = e^{-a(x - x_0)}$$

Ces 2 expressions sont équivalentes ; elles représentent l'intégrale générale. On peut les ajouter membre à membre :

$$\frac{2ay}{\sqrt{C}} = e^{a(x - x_0)} + e^{-a(x - x_0)}$$

d'où l'intégrale générale : $y = \frac{\sqrt{C}}{2a}\left(e^{a(x - x_0)} + e^{-a(x - x_0)}\right)$

$\sqrt{C}$ peut être une constante arbitraire de forme quelconque.
L'expression de y' sera facile à obtenir : $y' = \sqrt{a^2y^2 - C}$
En retranchant membre à membre les 2 formules précédentes, on a :

$$\frac{2\sqrt{a^2y^2 - C}}{\sqrt{C}} = e^{a(x - x_0)} - e^{-a(x - x_0)}$$

d'où : $y' = \sqrt{a^2y^2 - C} = \frac{\sqrt{C}}{2}\left(e^{a(x - x_0)} - e^{-a(x - x_0)}\right)$

Appliquons le même calcul à l'équation :

$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ Multiplions les 2 membres par $\frac{dy}{dx}$:

$\frac{dy}{dx} \times \frac{d^2y}{dx^2} + a^2y\frac{dy}{dx} = 0$ ou, en intégrant une 1e fois :

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a^2y^2 = C$ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{C - a^2y^2}$ d'où l'intégrale : $x = \int \frac{dy}{\sqrt{C-a^2y^2}}$

Posons : $a^2y^2 = cz^2$, $ay = z\sqrt{C}$, $dy = \frac{\sqrt{C}}{a}dz$.

$a(x-x_0) = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z + C$ Donc :

$z = \sin a(x-x_0)$ $y = \frac{\sqrt{C}}{a}\sin a(x-x_0)$

$\frac{\sqrt{C}}{a}$ est une constante quelconque b : l'intégrale générale est donc : $y = b\sin a(x-x_0)$ x_0 est la 2e constante.

Développons le sinus : $y = b\sin ax\cos ax_0 - b\cos ax\sin ax_0$

Posons comme constantes : $b\cos ax_0 = A$, $-b\sin ax_0 = B$, nous avons l'intégrale générale : $y = A\sin ax + B\cos ax$.

Développement en série des fonctions de plusieurs variables ; maxima et minima

Soit une fonction : $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ admettant, pour un système de valeurs attribuées aux variables, des dérivées continues jusqu'à l'ordre r. Considérons la fonction : $f(x_1 + a_1 t, x_2 + a_2 t, \ldots\ldots x_n + a_n t)$

On peut prendre la différentielle p^e de cette fonction par rapport à t considéré comme variable indépendante ; elle contient une première partie qui est homogène et qui s'écrit symboliquement : $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n\right)^p$

Si dans cette forme on regarde $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ comme des fonctions d'une variable, et $dx_1, dx_2, \ldots\ldots dx_n$ comme leurs dérivées, cette expression deviendra la dérivée p^e de la fonction composée de cette nouvelle variable.

Or les dérivées de $x_1 + a_1 t$, $x_2 + a_2 t, \ldots\ldots x_n + a_n t$ par rapport à t sont $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$. Les dérivées suivantes sont nulles, de sorte que la dérivée p^e de f par rapport à t peut s'écrire symboliquement :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_n\right)^p$$

à condition que dans le terme général : $\frac{\partial^p f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots\ldots\ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$

on remplace en général x_i par $(x_i + a_i t.)$

Cette fonction de t, nous pouvons ~~toujours~~ la développer par la formule de Maclaurin, pourvu que les conditions de cette formule soient satisfaits. Ces conditions sont : Que les dérivées de cette fonction par rapport à t ~~existent~~ pour $t = 0$ existent jusqu'à la r^e, et que les $(r-1)$ premiers soient continues. Il suffit pour cela que les r premiers dérivées ~~soient~~ finies et continues. – Il ne suffit plus ici que les dérivées partielles d'ordre r existent, il faut encore, ~~encore~~ pour l'application du théorème des fonctions composées, qu'elles soient continues. Dans ces conditions, nous pouvons écrire :

$$f(x_1 + a_1 t,\ x_2 + a_2 t,\ \ldots\ldots\ldots\ x_n + a_n t) =$$

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) + \frac{t}{1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_n\right)$$

$$+ \frac{t^2}{1.2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_n\right)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{t^{r-1}}{1.2\ldots(r-1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_n\right)^{(r-1)}$$

$$+ \frac{t^r}{1.2\ldots\ldots r}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_n\right)^r$$

Nous écrivons le dernier terme sous la forme de Lagrange ; on devra y remplacer t par θt ; $0 < \theta < 1$. et, une fois la dérivation effectuée, x_i par $(x_i + \theta a_i t.)$ Si l'on y fait $t = 1$, on aura le développement de

$$f(x_1+a_1, x_2+a_2, \ldots\ldots x_n+a_n) = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$
$$+\frac{1}{1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}a_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}a_2+\ldots\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}a_n\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}a_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}a_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}a_n\right)^2$$
$$+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}a_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}a_2+\ldots\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}a_n\right)^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots r}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}a_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}a_2+\ldots\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}a_n\right)^r$$

en remplaçant ds le dernier terme x_i par $(x_i+\theta a_i)$.
C'est la formule de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables : elle se compose d'une suite de polynômes homogènes en $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$, et du terme complémentaire.
Si la formule est applicable quand r augmente indéfiniment, et si le terme complémentaire tend vers 0, la formule donne une série infinie convergente qui représente la valeur de

$$f(x_1+a_1, x_2+a_2, \ldots\ldots\ldots x_n+a_n)$$

Si on y fait $x_1=x_2=\ldots\ldots\ldots=x_n=0$, on a l'analogue de la formule de Maclaurin pour les f. de plusieurs variables.
Si l'on considère $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ comme des infiniment petits du 1er ordre, on voit que l'expression de la fonction précédente en série se compose en général d'une partie finie :

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$

et d'un infiniment petit du 1er ordre au moins.



Conséquences pour les fonctions algébriques entières.

Supposons que f soit un polynôme entier du degré r en $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$. Le développement sera limité, car les dérivées d'ordre $(r+1)^e$ sont nulles ; celles d'ordre r^e sont des constantes, ce qui montre que le terme complémentaire est de la même forme que les autres.

Considérons maintenant le cas d'un polynôme entier et homogène du degré r en $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$. Remplaçons $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ par $\lambda x'_1, \lambda x'_2, \ldots\ldots \lambda x'_n$. On a la formule

$$f(x_1+\lambda x'_1, x_2+\lambda x'_2, \ldots\ldots x_n+\lambda x'_n) =$$
$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) + \frac{\lambda}{1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}x'_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x'_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x'_n\right)$$
$$+\frac{\lambda^2}{1.2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}x'_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x'_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x'_n\right)^2 + \ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\lambda^r}{1.2.3\ldots r}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}x'_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x'_2 + \ldots\ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}x'_n\right)^r$$

Observons que $f(x_1+\lambda x'_1, x_2+\lambda x'_2, \ldots\ldots x_n+\lambda x'_n)$

$$= \lambda^r f\left(x'_1+\frac{x_1}{\lambda}, x'_2+\frac{x_2}{\lambda}, \ldots\ldots x'_n+\frac{x_n}{\lambda}\right)$$

De même le 2e membre du développement peut s'écrire :

$$f(x'_1, x'_2, \ldots\ldots x'_n) + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial x'_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x'_2}x_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x'_n}x_n\right)$$
$$+\frac{1}{1.2.\lambda^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x'_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x'_2}x_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x'_n}x_n\right)^2 + \ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots r.\lambda^r}\left(\frac{\partial f}{\partial x'_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x'_2}x_2 + \ldots\ldots \frac{\partial f}{\partial x'_n}x_n\right)^r$$

Si l'on identifie ces 2 développements, on a l'identité générale suivante entre les coefficients des mêmes puissances de λ :

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}x'_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}x'_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}x'_n\right)^{\alpha}=\frac{1}{1.2.3\ldots(r-\alpha)}\left(\frac{\partial f}{\partial x'_1}x_1+\frac{\partial f}{\partial x'_2}x_2\ldots+\frac{\partial f}{\partial x'_n}x_n\right)^{r-\alpha}$$

Les formes successives en $x'_1, x'_2, \ldots\ldots x'_n$ sont les polaires de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ — En particulier :

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots r}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}x'_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}x'_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}x'_n\right)^{r}=f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$

Conséquence. Soit f un polynôme homogène de degré r. Substituons-y aux anciennes variables de nouvelles variables en nombre différent, et liées linéairement aux anciennes par des éq. de la forme :

$$x_i = \alpha_{i_1} y_1 + \alpha_{i_2} y_2 + \ldots\ldots + \alpha_{i_p} y_p$$

Le polynôme f est alors transformé en un autre Φ, homogène :

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = \Phi(y_1, y_2 \ldots\ldots y_p)$$

Soient $y'_1, y'_2, \ldots\ldots y'_p$ d'autres valeurs attribuées aux variables y, et $x'_1, x'_2, \ldots\ldots x'_p$ les valeurs correspondantes des x_i

$$x'_i = \alpha_{i_1} y'_1 + \alpha_{i_2} y'_2 + \ldots\ldots\ldots \alpha_{i_p} y'_p.$$

Remplacer y par $(y+\lambda y')$, c'est remplacer x par $(x+\lambda x')$. On a donc encore l'identité :

$$f(x_1+\lambda x'_1, x_2+\lambda x'_2, \ldots x_n+\lambda x'_n) = \Phi(y_1+\lambda y'_1, y_2+\lambda y'_2, \ldots\ldots y_n+\lambda y'_n)$$

Si l'on développe les 2 membres par la formule connue et qu'on identifie les coefficients des mêmes puissances de λ, on a :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}x'_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}x'_2+\ldots\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}x'_n\right)^{\alpha}=\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}y'_1+\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}y'_2+\ldots\ldots+\frac{\partial \Phi}{\partial y_p}y'_p\right)^{\alpha}$$

Cette identité montre que ces 2 formes sont covariantes, et justifie l'importance qu'elles ont en analytique. L'une de ces formes, égalée à 0, donne l'équation de la tangente ou du plan tangent. L'identité précédente montre que cette équation ne change pas quand on transforme les coordonnées. En particulier, elle justifie la considération des tangentes et des plans tangents aux points imaginaires des courbes et des surfaces. En effet, les points imaginaires ne sont pas définis comme des êtres géométriques, mais comme des quantités numériques représentées par leurs coordonnées. Si les propriétés qu'on leur attribue ne persistent pas quand on change de coordonnées, elles n'ont pas de sens géométrique et il n'y a aucun intérêt à représenter géométriquement les nombres imaginaires; pour qu'il soit légitime d'employer le langage et les formules géométriques ~~pour~~ à traduire les propriétés des imaginaires, il faut avoir démontré que ces propriétés sont indépendantes du choix des variables coordonnées.

15° Maxima et minima

Définition. Soit une fonction : $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$

On dira qu'elle est maxima pour un système de valeurs

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

si la différence : $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) - f(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$ est négative pour toutes les valeurs des x vérifiant les inégalités :

$|x_1 - a_1| < \varepsilon$, $|x_2 - a_2| < \varepsilon, \ldots\ldots\ldots |x_n - a_n| < \varepsilon$,

ε étant un nombre positif quelconque.

Elle sera minima si cette différence est positive ds les mêmes conditions.

Pour reconnaître si un système de valeurs attribuées aux x rend la fonction maxima ou minima, nous supposerons que cette fonction est développable par la formule de Taylor au voisinage de ce système; nous poserons

$$x_i - a_i = h_i ,$$

et nous écrirons le développement suivant :

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots\ldots a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$$
$$= \left(h_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots\ldots + h_n \frac{\partial f}{\partial a_n}\right) + \frac{1}{1.2}\left(h_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots\ldots + h_n \frac{\partial f}{\partial a_n}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}(\ldots)\ldots\ldots\ldots\ldots + R \quad \text{Terme complémentaire}$$

Posons maintenant $h_i = K_i t$; le 2e membre devient :

$$t\left(K_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + K_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots\ldots + K_n \frac{\partial f}{\partial a_n}\right) + \frac{t^2}{1.2}\left(K_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + K_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots\ldots + K_n \frac{\partial f}{\partial a_n}\right)^2$$
$$+ \frac{t^3}{1.2.3}(\ldots\ldots)\ldots\ldots\ldots\ldots + R$$

Regardons $K_1, K_2, \ldots\ldots K_n$ comme fixes, et t comme la variable. Si le système $(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$ correspond à un maximum ou à un minimum, le 2e membre doit garder le même signe pour des valeurs suffisamment petites de t ; $|t| < \frac{\varepsilon}{K}$

K étant le plus grand en valeur absolue des nombres $K_1, K_2 \ldots K_n$.

Cette expression est, à part le terme complémentaire, un polynôme entier en t : or c'est le 1er terme qui doit donner son signe à ce polynôme ; il faut donc que

$$K_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + K_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + K_3 \frac{\partial f}{\partial a_3} + \ldots\ldots + K_n \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0$$

quelles que soient les valeurs des k; c.à.d. que les dérivées partielles de la fonction doivent être nulles pour le système de valeurs $a_1, a_2, \ldots a_n$. — Il peut se faire que les dérivées secondes soient nulles; mais pour qu'il y ait un maximum ou un minimum, il faut que le 3e terme aussi soit nul, et plus généralement, il faut que les premières dérivées qui ne s'annulent pas toutes ensemble soient d'ordre pair. Pour qu'il y ait maximum, il faut que le premier terme non nul soit négatif; pour un minimum, qu'il soit positif, et cela pour toutes les valeurs de $k_1, k_2, \ldots k_n$ inférieures à K en valeur absolue.

Reste à savoir si ces conditions sont suffisantes: d'autre part, il faut pouvoir s'assurer que les formes homogènes en $k_1, k_2, \ldots k_n$ restent toujours de même signe. On n'a de règle pour le reconnaître que dans le cas où la forme est quadratique, c.à.d. pour les dérivées du 2e ordre.

Remarquons que ces conditions, que nous avons prouvé être nécessaires, ne peuvent pas être suffisantes, dans le cas d'une fonction de plusieurs variables. Même dans le cas où les dérivées partielles sont nulles, la forme quadratique en $k_1, k_2, \ldots k_n$ n'est jamais négative; on ne peut donc jamais affirmer que le système de valeurs $a_1, a_2, \ldots a_n$ correspond à un maximum de la fonction. — Si l'on considère les valeurs $k_1 t, k_2 t, \ldots k_n t$, et qu'on fixe $k_1, k_2, \ldots k_n$, on peut affirmer que la différence

$$f(a_1+k_1 t, a_2+k_2 t, \ldots a_n+k_n t) - f(a_1+a_2+\ldots+a_n) \gtrless 0$$

pour des valeurs de t comprises entre $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$. Or cet ε

dépend des valeurs de $k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$. Pour un autre système de k, on aurait un autre ε. On ne peut donc affirmer que pour tous les h inférieurs en valeur absolue à un nombre fixe, la différence $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots\ldots a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)$ soit toujours positive ou toujours négative.

Géométriquement considérons une fonction de 3 variables : $f(x, y, z)$ et un système de valeurs a, b, c représentant un point M. Appelons k_1, k_2, k_3 α, β, γ. Les h sont alors : $\alpha t, \beta t, \gamma t$. Les points $(a+\alpha t, b+\beta t, c+\gamma t)$ sont situés sur une droite passant par le p. M. Supposons que les dérivées premières : $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}$ soient nulles, et que la forme quadratique $\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial a} + \beta\frac{\partial f}{\partial b} + \gamma\frac{\partial f}{\partial c}\right)$ soit positive. On pourra toujours prendre sur la droite 2 points M', M'' de part et d'autre du p. M, tels que $f(x, y, z) - f(a, b, c) \geqq 0$ pour tous les points situés sur la droite entre M', M''.

De même un autre système de K donnerait une autre droite sur laquelle on aurait d'autres points extrêmes correspondant à un nouvel ε. Mais on ne peut pas affirmer l'existence d'une sphère qui aurait M pour centre et un rayon suffisamment petit pour que $f(x, y, z) - f(a, b, c) \geqq 0$ pour tous les points de cette sphère.

$M'' \begin{cases} a-\alpha\varepsilon \\ b-\beta\varepsilon \\ c-\gamma\varepsilon \end{cases}$

$M(a, b, c)$

$M' \begin{cases} a+\alpha\varepsilon \\ b+\beta\varepsilon \\ c+\gamma\varepsilon \end{cases}$

Exemple : Soit $\varphi(x, y) = y^2 - x^3$.

Les dérivées premières sont $2y$, $3x^2$; nulles pour $x = y = 0$.

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) = \frac{1}{1.2} h^2 + \ldots\ldots$$

Il semble qu'il y ait un minimum. Mais il est aisé de voir que la courbe ($\varphi(x, y) = 0$) partage le plan en 2 parties ; entre les 2 branches, $y^2 - x^3$ est positif ; en dehors, il est négatif.

Dans l'une et dans l'autre partie, on peut prendre des points aussi voisins de l'origine que l'on veut ; sur toute sécante issue de l'origine (sauf l'axe des x) il y a des points pour lesquels $y^2 - x^3$ est négatif. Il n'y a donc ni maximum ni minimum.

O

M

— Revenons à la fonction : $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$

Supposons que les dérivées $\frac{df}{da_1}, \frac{df}{da_2}, \ldots\ldots \frac{df}{da_n}$ soient nulles, et que la forme du 2e ordre ne soit pas nulle.

Le système des valeurs $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ correspond à un maximum si cette forme est <u>définie négative</u>, à un minimum si elle est <u>définie positive</u>.

Une forme quadratique à n variables est dite <u>définie positive</u> si elle est positive quelles que soient les valeurs des variables sauf le cas où elles sont toutes nulles ; <u>définie négative</u> si elle est négative dans les mêmes conditions.

Pour savoir si une forme est définie, on la décompose en carrés.

Il faut d'abord que tous les carrés des variables y entrent, car autrement on aurait un produit de 2 facteurs linéaires indépendants, c.à.d. une différence de carrés, qui peut rendre la forme positive ou négative à volonté. Il faut de plus que les coefficients des carrés soient tous de même signe; alors la forme sera toujours de même signe ou nulle. Pour qu'elle soit définie (c.à.d pour qu'elle ne puisse être nulle) il ne faut pas qu'il y ait moins de carrés que de variables; car alors on pourrait trouver des valeurs qui annulent la forme quadratique.

En résumé, il faut qu'on ait autant de carrés que de variables, et que les coefficients de tous ces carrés soient de même signe.

Nous allons considérer la forme: $\left(h_1\frac{\partial f}{\partial a_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial a_2}+\dots+h_n\frac{\partial f}{\partial a_n}\right)^2$.

Ecrivons la formule de Taylor avec 3 termes:

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots\dots a_n+h_n)-f(a_1, a_2, \dots\dots a_n)=$$

$$\frac{1}{1.2}\left(h_1\frac{\partial f}{\partial a_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial a_2}+\dots+h_n\frac{\partial f}{\partial a_n}\right)^2+\frac{1}{1.2.3}\left(h_1\frac{\partial f}{\partial a_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial a_2}+\dots+h_n\frac{\partial f}{\partial a_n}\right)^3$$

en remplaçant dans ce dernier terme $a_1, a_2, \dots a_n$ par

$$a_1+\theta h_1,\ a_2+\theta h_2, \dots\dots a_n+\theta h_n.$$

Supposons que la forme quadratique soit définie positive. Décomposons-la en carrés, de manière à amener successivement à la dernière place chacune des variables $h_1, h_2, \dots h_n$. Dans chaque mode de décomposition, le dernier carré, qui contient une seule variable, a un coefficient positif. Désignons par α un nombre

positif plus petit que tous ces coefficients. — Appelons h la valeur absolue de celle des quantités $h_1, h_2, \ldots\ldots h_n$ qui est la plus grande en valeur absolue. La forme quadratique sera toujours supérieure à αh^2. — Pour s'en rendre compte, imaginons qu'on ait effectué la décomposition en carrés en amenant au dernier rang le h le plus grand en valeur absolue. Le 1er terme sera plus petit que $\frac{\alpha h^2}{2}$.

Si nous désignons par M un nombre supérieur en valeur absolue aux coefficients de toutes les dérivées du 3e ordre, la forme cubique sera plus petite en valeur absolue que $n^3 M h^3$. Car si elle était développée, on remplacerait les coefficients par M, et les h_i par h, ce qui l'augmenterait. — Donc la différence qui forme le 1er membre est certainement supérieure à

$$\frac{\alpha h^2}{2} - \frac{n^3 M h^3}{6} = \frac{h^2}{2}\left(\alpha - \frac{n^3 M h}{3}\right)$$

Pour que cette dernière quantité soit positive, il faut que :

$$h < \frac{3\alpha}{n^3 M} \quad \text{qui est un nombre fixe.}$$

Dans ce cas, le système $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ correspond à un minimum.

— Supposons que la forme quadratique décomposée en carrés donne des carrés positifs et négatifs. Pour des h convenables elle peut être rendue positive ou négative à volonté. Si elle est positive pour un système de h, elle le sera pour tout système de valeurs proportionnelles à celles-là ; de même si elle est négative pour un autre système de valeurs, elle sera encore négative

pour tout système proportionnel à celui-là. On a donc à volonté des expressions positives et négatives pour des h aussi petits qu'on le veut; il n'y a ni maximum ni minimum.

— Si tous les carrés sont positifs, mais s'il y en a moins que de variables, on ne peut rien affirmer touchant la fonction.

— Examinons le cas d'une fonction de 2 variables;

$$f(x, y)$$

Pour $x = a$, $y = b$, elle est maxima; on peut écrire:

$$f(x, y) - f(a, b) < 0$$

pour toutes les valeurs de x, y voisines du système (a, b).

Considérons l'éq: $f(x, y) - f(a, b) = 0$

Elle est vérifiée par $x = a$, $y = b$, mais non par les valeurs voisines de a, b; donc le point (a, b) est un point isolé. — Or on a des méthodes pour reconnaître les points isolés d'une courbe algébrique, toutes les fois que l'équation de la courbe est développable en une série de Taylor au voisinage du point considéré. — On cherche les points singuliers en choisissant tous ceux qui annulent les dérivées premières. Puis on étudie la courbe au voisinage de chacun de ces points en y transportant l'origine. On arrive ainsi à reconnaître quels sont les points isolés.

16e Exemple. Soit à chercher le maximum ou le minimum de la distance d'un point d'une surface au plan tangent à cette surface en un point fixe.

Supposons que la surface soit déterminée par z fonction de x, y. L'équation du plan tangent au p (x_0, y_0, z_0) est :

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$$

et la distance d'un point de la surface à ce plan a pour expression :

$$\frac{z - z_0 - p_0(x - x_0) - q_0(y - y_0)}{\sqrt{1 + p_0^2 + q^2}}$$

Il suffit de chercher le maximum ou le minimum du numérateur. Les dérivées premières par rapport à x et à y sont :

$$p - p_0, \qquad q - q_0.$$

Posons : $x = x_0 + h, \quad y = y_0 + k.$ On a par suite :

$$z = z_0 + p_0 h + q_0 k + \frac{1}{2}(r_0 h^2 + 2 s_0 hk + t_0 k^2)$$

Le numérateur se réduit à : $\frac{1}{2}(r_0 h^2 + 2 s_0 hk + t_0 k^2)$

L'existence du maximum ou du minimum, pour le ~~système~~ point (x, y, z) dépend de la forme quadratique :

$$(r_0 h^2 + 2 s_0 hk + t_0 k^2)$$

Si cette somme n'est pas définie il n'y aura ni maximum ni minimum. On voit que pour certaines valeurs de h, k suffisamment petites le numérateur sera positif et que pour d'autres il sera négatif. La surface sera donc pour certains points au-dessus, et pour certains autres au-dessous du plan tangent. On voit aussi que dans ce cas les tangentes aux lignes asymptotiques sont réelles. $s_0^2 - r_0 t_0 > 0.$

Supposons maintenant que la forme soit définie, càd :

$$r_0 t_0 - s_0^2 > 0.$$

Le 1er terme donne son signe à la somme ; suivant que la forme quadratique sera positive ou négative, il y aura un minimum ou un maximum. Dans ce cas la surface reste tout entière d'un même côté du plan tangent au voisinage du point de contact. — Dans le cas où

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0$$

on ne peut rien affirmer touchant le maximum ou le minimum.

— 2e Exemple. Chercher le maximum et le minimum de la distance d'un point à une surface.

Supposons la surface définie par z donné en fonction de x, y. La distance du point (x_0, y_0, z_0) à la surface est :

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

Les demi-dérivées partielles par rapport à x, y sont :

$$x-x_0+p(y-y_0) \qquad x-x_0+q(z-z_0)$$

Pour qu'il y ait maximum ou minimum il faut que ces 2 dérivées premières soient nulles. On a ainsi (avec l'éq. de la surface) un système de 3 équations qui donne en général un nombre fini de solutions.

Si l'on prenait dans ces équations x, y, z comme constantes et x_0, y_0, z_0 comme variables, on aurait l'équation de la normale à la surface au p. (x, y, z). On peut alors se demander

comment le point (x_0, y_0, z_0) doit être situé pour que sa distance au pied de la normale (x, y, z) soit un maximum ou un minimum. Appelons φ cette distance:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x - x_0 + p(z - z_0) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = y - y_0 + q(z - z_0)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 1 + r(z - z_0) + p^2 \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = s(z - z_0) + pq \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 1 + t(z - z_0) + q^2$$

Il y aura maximum si la forme:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} k^2$$

est définie négative; minimum si elle est définie positive.

Pour qu'elle soit définie, il faut que:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \qquad \text{c'est à dire:}$$

$$\left(1 + r(z - z_0) + p^2\right)\left(1 + t(z - z_0) + q^2\right) - \left(s(z - z_0) + pq\right)^2 > 0$$

Cette équation est du 2e degré en z_0. Il y aura donc en général 2 points sur la normale qui permettront de distinguer le maximum et le minimum de cette normale.

Ces points sont liés aux centres de courbure de la section principale menée par cette normale par une relation remarquable — Supposons que le pied de la normale soit l'origine et la normale l'axe des z. Au point considéré, x, y, z sont nuls, ainsi que p et q.

Les dérivées secondes deviennent: $1 - rz_0$, $-sz_0$, $1 - tz_0$.

Considérons une section normale menée par l'axe des z; elle coupe le plan des x, y suivant OX, et la surface suivant une courbe tangente à OX en O. Le centre de courbure de cette courbe au point O est donné par la formule:

$$OC = \frac{1}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial X^2}\right)^2}$$ pour $X = 0$. (X coordonnée dans le plan sécant.)

Appelons α l'angle xOX: $x = X\cos\alpha$ $y = X\sin\alpha$

L'équation de la surface devient: $z = f(X\cos\alpha, X\sin\alpha)$

On en tire les dérivées: $\frac{\partial z}{\partial X} = p\cos\alpha + q\sin\alpha$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin^2\alpha$$ D'où:

$$OC = \frac{1}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t^2\sin^2\alpha}$$

Cette quantité est susceptible d'un maximum et d'un minimum qui correspondent aux 2 axes d'une conique. Prenons pour axes des x et des y les 2 axes correspondants de notre surface; on a alors: $s = 0$

$$OC = \frac{1}{r^2\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha}$$

On appelle <u>sections principales</u> celles qui correspondent aux maximum et minimum du rayon de courbure: c'est dans ce cas xOz, yOz. Les rayons de courbure maximum et minimum sont $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{t}$.

Soit OP le rayon correspondant à la section zOx, OQ celui de la section zOy:

$OP = \frac{1}{r}$, $OQ = \frac{1}{t}$.

Revenons à la forme quadratique ; pour qu'elle soit définie (dans le cas présent où x, y, z, p, q, s sont nuls) il faut que :

$$(1-rz_0)(1-tz_0) > 0$$

ce qui aura lieu si z_0 est suffisamment petit.

$\frac{\partial Q}{\partial x^2} = 1-rz_0$ est positif quand z_0 est suffisamment petit ; la forme sera alors positive ; la distance du p. z_0 au p. O sera un minimum.

Il faut distinguer 2 cas selon que r et t sont de même signe ou de signes contraires. S'ils sont de même signe, on a alors :

$$rt - s^2 > 0 \qquad \text{puisque } s = 0.$$

Cela veut dire que la surface est tout entière d'un même côté du plan tangent. Au contraire, si r et t sont de signes contraires, le plan tangent traverse la surface.

Dans le 1er cas (r et t de même signe) les 2 centres P et Q sont d'un même côté du plan tangent. Quand z_0 est entre O et Q (le plus rapproché des deux) il y a minimum ; entre P et Q, ni maximum ni minimum ; au-delà de P, il y a maximum. Pour les points P et Q eux-mêmes on ne peut rien affirmer.

Dans le 2e cas (r, t de signes contraires) P et Q sont de part et d'autre du plan tangent. Tant que z_0 est entre P et Q, la forme est définie positive, et il y a minimum ; quand z_0 est en dehors de P et Q, il n'y a ni maximum ni minimum

Remarque relative à la recherche des valeurs des variables qui correspondent aux maxima et minima d'une fonction

Soit une fonction de n variables : $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ dont les variables sont liées par certaines relations ;

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0, \quad \psi(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0, \quad \text{etc.}$$

Ces équations de condition doivent être en nombre moindre que les variables. S'il y en a $(n-1)$, la fonction f est d'une seule variable ; $(n-2)$, de 2 variables, etc.

On peut se proposer de chercher les valeurs de $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ qui annulent les dérivées premières de f par rapport aux variables indépendantes qui subsistent quand on en a éliminé p au moyen des p équations de condition.

On est ramené à la recherche des dérivées d'une fonction implicite.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

On écrit que les différentielles des fonctions $\varphi, \psi, \ldots\ldots$ sont nulles ;

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad \text{etc.}$$

On a ainsi p équations du 1er degré entre les n différentielles $dx_1, dx_2, \ldots\ldots dx_n$. On les résout par rapport à p d'entre elles et on remplace celles-ci dans l'expression de df par leur valeur trouvée en fonction des $(n-p)$ autres.

Les coefficients de ces $(n-p)$ différentielles restantes sont les dérivées partielles de f par rapport aux variables correspondantes. On les égalera donc à 0 pour trouver les maxima et les minima de la fonction.

Moyen d'élimination ; multiplier chaque équation par un coefficient indéterminé λ, μ, ν, etc ; on a alors :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \nu \ldots\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \nu \ldots\right) dx_2$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \nu \ldots\right) dx_3 + \ldots\ldots\ldots$$

On devra prendre pour $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ les valeurs qui annulent les coefficients des différentielles. On les égalera donc à 0, et on aura les éq :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \nu \ldots\ldots = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \ldots\ldots n.$$

Parmi ces n équations, on en prendra p pour déterminer les coefficients arbitraires $\lambda, \mu, \nu \ldots\ldots$ et les $(n-p)$ autres seront des équations entre les différentielles restantes : elles représentent les conditions d'un maximum ou d'un minimum.

Remarquons que les premiers membres de ces équations sont les dérivées partielles de la fonction : $f + \lambda\varphi + \mu\psi + \nu \ldots\ldots$ par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$.

Des fonctions de variables imaginaires.

Retour sur la définition des nombres imaginaires —

On appelle nombre imaginaire l'ensemble de 2 nombres réels rangés dans un ordre déterminé.

Cette définition suffit pour introduire ces nouvelles quantités dans le calcul. On pourrait de même introduire les fractions, par exemple, comme des ensembles de 2 nombres entiers rangés dans un ordre déterminé, et définir ensuite, sans considérer leur signification, les conditions de leur égalité et les opérations qu'on peut effectuer sur eux.

Soit (a, b) un nombre imaginaire. Un nombre réel est un cas particulier des nombres imaginaires ; on l'écrira $(a, 0)$. Au contraire, on appellera un nombre purement imaginaire tout nombre de la forme : $(0, b)$

2 nombres imaginaires (a, b), (a', b') sont égaux quand on a séparément : $a = a'$, $b = b'$.

La somme de 2 nombres imaginaires (a, b), (a', b') est :

$$(a + a', \; b + b')$$

Il est facile de voir que les propriétés essentielles de l'addition subsistent pour les nombres imaginaires. Ces propriétés se traduisent par les identités suivantes :

$$A + B = B + A$$
$$A + (B + C) = A + B + C$$
$$A + 0 = A$$

Étant donnés 2 nombres imaginaires, on prouve aisément qu'il y a un nombre imaginaire, et un seul, qui ajouté au 2e reproduise le 1er; on l'appelle leur <u>différence</u>.

Au lieu d'écrire (a, b) on écrit le nombre imaginaire $(a+bi)$. i est simplement un symbole qui, placé à côté de b, indique que c'est le 2e des 2 nombres réels qui composent le nombre imaginaire. Remarquons que:

$$a = (a, 0) \qquad bi = (0, b)$$

Donc:

$$(a, 0) + (0, b) = (a, b) = a + bi$$

Le nombre imaginaire (a, b) est donc bien la somme de a et de bi, ce qui justifie le signe $+$. Quant au signe i, il permet d'intervertir l'ordre des 2 nombres réels sans qu'on soit exposé à les confondre: $bi + a = a + bi$.

Multiplication. Nous appellerons produit de 2 nombres imaginaires (a, b), (a', b') le nombre imaginaire:

$$(aa' - bb', \ ab' + ba')$$

Cette convention, en apparence arbitraire, se rapporte à une notion algébrique qui joue un rôle essentiel dans le calcul des imaginaires —

Considérons les 2 binômes: $a + bx$, $a' + b'x$.

Leur produit est: $bb'x^2 + (ab' + ba')x + aa'$

Divisons-le par $x^2 + 1$; le reste sera:

$$aa' - bb' + (ab' + ba')x$$

On voit que les 2 nombres réels qui composent le produit de 2 nombres imaginaires sont respectivement le coefficient de x et le terme indépendant de x qui figurent dans ce reste.

— Les conventions adoptées pour les opérations réelles subsistent pour les nombres imaginaires en supposant qu'on divise les binômes $(a+bx)$ par (x^2+1), et qu'on considère les restes. Ainsi, le nombre imaginaire qui représente la somme de $(a+bi)$, $(a'+b'i)$ est le reste de la division par (x^2+1) de la somme de $(a+bx)$ et $(a'+b'x)$.

Nous retrouvons dans le calcul algébrique des propriétés analogues aux propriétés arithmétiques. Par exemple

Définition de la congruence. On dit que 2 polynômes en x, $f(x)$, $\varphi(x)$ sont congrus par rapport à un 3e $\psi(x)$ quand leur différence est divisible par ce 3e, et l'on écrit :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \left[\mod \psi(x) \right]$$

Ils resteront congrus par rapport au même module si on les multiplie par un même polynôme (mais non si on les divise) — On peut ajouter et multiplier entre elles plusieurs congruences ~~terme à terme~~ membre à membre, pourvu que leur module soit le même.

Cela posé, on peut dire que 2 nombres imaginaires sont égaux si les 2 polynômes correspondants $(a+bx)$ $(a'+b'x)$ sont congrus par rapport à (x^2+1)

Ainsi (x^2+1) sera le module général de congruence auquel on devra rapporter les quantités imaginaires.

Nous venons de voir que le produit $(a+bi)(a'+b'i)$ est l'ensemble des 2 coefficients de 1 et de x dans le reste de la division du produit $(a+bx)(a'+b'x)$ par (x^2+1).

En d'autres termes, $(a''+b''i)$ sera le produit de $(a+bi)$ et $(a'+b'i)$ si l'on a :

$$(a''+b''x) \equiv (a+bx)(a'+b'x) \left[\bmod (x^2+1)\right]$$

— Remarquons qu'on ne peut avoir un produit nul $(0,0)$ que si l'un des facteurs imaginaires est nul $(0,0)$.

En effet, les 2 équations : $\{aa'-bb'=0 \quad ab'+ba'=0$ n'admettent comme solution que $\{a'=0, \quad b'=0$. à moins que le déterminant (a^2+b^2) ne soit nul, ce qui exige qu'on ait : $a=0, \quad b=0$.

— Remarquons aussi que le produit : $(0,1)(0,1)$ est égal, en vertu de nos conventions, à $(-1,0)$.

Le nombre imaginaire $(0+1i)$ s'écrit simplement i ; on a donc, avec l'écriture habituelle :

$$i^2 = -1.$$

Cette égalité n'a pas d'autre sens que celle que nous avons posée ci-dessus : $(0,1)(0,1) = (-1,0)$

Elle résulte de la définition du produit que nous avons donnée. Il serait absurde d'en tirer une valeur quelconque de i,

car i n'est pas un nombre mais un signe ou un symbole.

— Les propriétés des produits de nombres réels subsistent pour les nombres imaginaires. Ainsi le produit de 2 nombres imaginaires ne change pas quand on en intervertit l'ordre.

Supposons maintenant qu'on veuille faire le produit de 3 facteurs imaginaires ; (a, b), (a', b'), (a'', b'').

On multipliera le produit des 2 premiers par le 3e ~~d'~~suivant la règle — On peut aussi procéder comme suit ;

Supposons que le produit des 2 premiers soit (p, q) :

$$(a+bx)(a'+b'x) \equiv (p+qx)\left[\text{mod}\,(x^2+1)\right]$$

$$(a+bx)(a'+b'x)(a''+b''x) \equiv (p+qx)(a''+b''x)\left[\text{mod}\,(x^2+1)\right]$$

Effectuons le produit $(p, q)(a'', b'')$ c'est un nombre imaginaire (p_1, q_1). On doit avoir ;

$$(a+bx)(a'+b'x)(a''+b''x) \equiv (p+qx)(a''+b''x) \equiv (p_1+q_1x)$$

La règle de congruence peut donc s'étendre de proche en proche au produit d'un nombre quelconque de facteurs imaginaires —

On étendra également à un produit quelconque les ~~théorèmes~~ propriétés fondamentales des produits de facteurs réels, à savoir :

1° On peut intervertir l'ordre des facteurs ;

2° On peut remplacer un nombre quelconque de facteurs par leur produit effectué.

Un produit de plusieurs facteurs ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul.

La théorie de la multiplication repose sur les 2 théorèmes suivants :

$$a(bc \ldots f) = abc \ldots f$$

$$(a+b)c = ac + bc$$

Ces théorèmes s'étendront sans difficulté aux imaginaires, soit en s'appuyant sur la définition du produit, soit en invoquant une loi de congruence.

Division. Étant donnés 2 nombres imaginaires (a, b), (a', b') il existe un 3e nombre imaginaire (x, y) tel que

$$(a', b')(x, y) = (a, b)$$

à moins que $(a', b') = 0$, c.à.d. $a' = 0$, $b' = 0$.

Pour déterminer x et y, il suffit de résoudre les 2 équations :

$$\left\{ a'x - b'y = a \qquad a'y + b'x = b \right.$$

Ce système admet en général une solution, à moins que le déterminant ne soit nul : $a'^2 + b'^2 = 0$, c.à.d. $a' = 0$, $b' = 0$.

La théorie des fractions s'étendrait de même aux nombres imaginaires, de sorte que toutes les opérations rationnelles peuvent s'appliquer aux nombres imaginaires.

— Représentation géométrique des imaginaires —

Soit un plan et 2 axes Ox, Oy rectangulaires tracés dans ce plan. Le nombre imaginaire $(a + bi)$ sera représenté par le point qui a pour abscisse a et pour ordonnée b : soit M. On dit que le point M a pour *affixe* $(a + bi)$

On dit aussi que l'~~a quantité~~ expression $(a+bi)$ est représentée par le segment de droite OM. — L'axe des abscisses est appelé l'axe des quantités réelles ; celui des ordonnées est l'axe des quantités purement imaginaires.

On appelle module de $(a+bi)$ la longueur du segment OM ; c'est la valeur arithmétique de $\sqrt{a^2+b^2}$.

On appelle argument de $(a+bi)$ l'angle, à un multiple près de 2π, que la demi-droite OM fait avec l'axe des x dans le sens de la rotation directe (ou positive).

Imaginons une demi-droite mobile autour du p. O, coïncidant d'abord avec Ox, puis tournant dans le plan jusqu'à ce qu'elle coïncide avec OM : le point situé sur cette droite à l'unité de distance du p. O aura décrit un arc qui, pris avec le signe de la rotation (directe ou inverse) de la demi-droite, sera une des valeurs de l'argument du point M.

Les valeurs de l'argument d'un même point forment une progression arithmétique dont la raison est 2π. — Il suffit d'avoir une quelconque de ces valeurs pour en déduire aussitôt toutes les autres.

Il n'y a que le nombre $(0,0)$ ou 0 pour qui l'argument n'ait pas de sens.

Si l'on appelle ρ le module et α l'argument d'un nombre imaginaire $(a+bi)$, on a les relations :

$$\begin{cases} a = \rho\cos\alpha \\ b = \rho\sin\alpha \end{cases}$$ d'où l'identité : $a+bi = \rho\cos\alpha + i\rho\sin\alpha$.

Le module d'un nombre imaginaire s'appelle souvent aussi la valeur absolue de ce nombre imaginaire ; on le représente alors par $|a + bi|$ qui équivaut à :

$$+\sqrt{a^2 + b^2}$$

Si A et B sont les points qui représentent les imaginaires

$$a + bi, \qquad a' + b'i,$$

le segment de droite AB représente le module de la différence

$$(a + bi) - (a' + b'i)$$

l'argument de cette différence est l'angle que AB fait avec Ox.

On démontrerait aisément les propositions suivantes :

Le module d'une somme est au plus égal à la somme des modules des éléments et au moins égal à leur différence.

Le module d'un produit est le produit des modules des facteurs, et l'une des valeurs de l'argument du produit est la somme des arguments des facteurs.

Le module du quotient de 2 imaginaires est le quotient de leurs modules, et l'argument de ce quotient a une valeur égale à la différence de ces modules.

— Si dans un polynôme entier à plusieurs variables, à coefficients réels et positifs, on remplace les variables par leur modules, on obtiendra une quantité égale ou supérieure au module du polynôme.

18. Définitions relatives aux fonctions d'une variable imaginaire.

Soit z une variable imaginaire. On dira que $f(z)$ est une fonction définie de z si à chaque valeur de z correspond

une valeur déterminée, réelle ou imaginaire, de $f(z)$

Se donner z, c'est se donner 2 nombres réels, x, y, qui en sont les éléments. $z = x + iy$

Se donner $f(z)$, c'est se donner 2 fonctions des 2 nombres réels x et y : $f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$

Une fonction peut n'être pas définie pour toutes les valeurs possibles de z, c.à.d pour tous les systèmes de valeurs x et y, géométriquement, pour tous les points du plan.

On a souvent besoin de définir une fonction pour tous les points situés à l'intérieur d'une portion de plan ou sur son contour. Cette <u>aire</u> dans laquelle on fait varier une imaginaire joue le même rôle dans la théorie des fonctions de variables imaginaires que l'<u>intervalle</u> pour les variables réelles.

— La définition de la <u>continuité</u> d'une fonction d'une variable imaginaire se calque sur celle de la continuité d'une fonction d'une variable réelle.

Supposons qu'une fonction $f(z)$ soit définie pour le point : $z_0 = x_0 + iy_0$ et pour les points voisins.

Elle sera <u>continue</u> pour ce point si à chaque nombre positif ε ~~on~~ on peut faire correspondre un nombre η tel que ~~la différence~~ l'on ait :

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de z satisfaisant à l'inégalité :

$$|z - z_0| < \eta .$$

Géométriquement, z est assujetti à se trouver à l'intérieur du cercle ayant pour centre le point z_0 et pour rayon η. Dans cette hypothèse, $f(z)$ sera continue si pour tous les z situés dans ce cercle, $f(z)$ tombe à l'intérieur du cercle qui a pour centre le point $f(z_0)$ et pour rayon ε.

On dit que la fonction $f(z)$ est continue dans une certaine aire déterminée si à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre η tel que l'on ait

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs z_1, z_2 prises dans l'aire donnée et satisfaisant à l'inégalité : $|z_1 - z_2| < \eta$.

On démontre que lorsqu'une fonction est continue pour tous les points d'une certaine aire, elle est continue dans l'aire tout entière (au second sens.)

Définition d'une fonction entière — On pourrait dire que $f(z)$ est une fonction entière de z, si on peut poser $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ φ et ψ étant des polynômes entiers en x, y, à coefficients réels.

Mais on est convenu d'appeler fonction entière d'une variable imaginaire z un polynôme de la forme :

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + A_m$$

$A_0, A_1, A_2 \ldots\ldots A_m$ étant des coefficients réels.

Ce polynôme peut se mettre sous la forme générale :

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

mais les polynômes φ et ψ ainsi obtenus ~~ne sont~~ pas les plus généraux du degré m, car il n'y entre que $2(m+1)$ coefficients réels.

La raison d'être de cette définition restreinte, c'est qu'elle permet de construire la théorie de 2 fonctions de 2 variables réelles sur le modèle de celle des fonctions d'une variable réelle, soit que les propriétés soient identiques, soit qu'elles soient une généralisation manifeste de celles des fonctions d'une variable. C'est dans la possibilité d'une pareille théorie que consiste la valeur et l'importance du symbolisme imaginaire ; aussi toutes les conventions et définitions ont-elles pour but de rendre aussi parfaite que possible la symétrie entre la théorie des fonctions imaginaires et celle des fonctions réelles.

— Il est facile de voir qu'une fonction entière de z est continue dans tout le plan.

— Définition de la fonction rationnelle. — De même on n'appellera pas fonction rationnelle de $z = x + iy$ une fonction pouvant se mettre sous la forme :

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

φ et ψ étant des ~~polynômes~~ fonctions rationnelles de x, y ; mais bien, pour conserver le parallélisme avec les fonctions réelles, le quotient de 2 polynômes entiers en z.

Il est facile de voir qu'une fonction rationnelle de z est continue pour tous les points du plan, sauf pour ceux qui représentent les racines du dénominateur.

Nous allons encore restreindre la définition des fonctions imaginaires. Nous n'admettrons que les fonctions qui admettent une dérivée, en calquant la définition de la dérivée sur celle de la dérivée d'une fonction réelle.

Soit $f(z)$ une fonction d'une variable imaginaire. Je dirai qu'elle a une dérivée pour z_0, et que cette dérivée est $f'(z_0)$ si à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un autre nombre positif η tel que l'on ait :

$$\left|\frac{f(z_0+\zeta)-f(z_0)}{\zeta} - f'(z_0)\right| < \varepsilon \quad \text{pour tout } \zeta < \eta.$$

On dit ordinairement que la fraction $\frac{f(z_0+\zeta)-f(z_0)}{\zeta}$ tend vers une limite qui est $f'(z_0)$, quand ζ tend vers 0.

Géométriquement, cela veut dire : Étant donné un point z_0 et un point $z_0+\zeta$ qui s'approche de z_0 d'une manière quelconque, il faut que de toutes les façons $\frac{f(z_0+\zeta)-f(z_0)}{\zeta}$ tende vers $f'(z_0)$ quand $z_0+\zeta$ tend vers z_0.

Si pour tous les points du plan la fonction a une dérivée, on la représentera en général par $f'(z)$

Supposons que pour tous les points d'une aire où la fonction admet une dérivée, on ait :

$$f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

La dérivée, si elle existe, aura pour expression :

$$\frac{\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y) + i\left[\psi(x+h, y+k) - \psi(x,y)\right]}{h+ik}$$

Cette fraction devra tendre vers un nombre imaginaire si l'on fait tendre h et k vers 0 d'une manière quelconque.
Supposons $k=0$, et faisons tendre h vers 0 ; il faudra que $\frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x,y)}{h}$ et $\frac{\psi(x+h,y) - \psi(x,y)}{h}$ tendent vers des limites, c.à.d. que φ et ψ aient des dérivées partielles φ'_x et ψ'_x.
Supposons maintenant $h=0$, et faisons tendre k vers 0 ; il faut que la fraction :

$$\frac{\varphi(x, y+k) - \varphi(x,y) + i\left[\psi(x,y+k) - \psi(x,y)\right]}{ik}$$

ou :

$$\frac{-i\left[\varphi(x,y+k) - \varphi(x,y)\right] + \psi(x,y+k) - \psi(x,y)}{k}$$

tende vers une limite, c.à.d. que φ et ψ aient des dérivées partielles φ'_y, ψ'_y. — Or on doit avoir :

$$\varphi'_x + i\psi'_x = -i\varphi'_y + \psi'_y \quad \text{D'où :} \quad \varphi'_x = \psi'_y \quad \varphi'_y = -\psi'_x.$$

Cette double condition est nécessaire pour l'existence de la dérivée $f(z)$. Nous supposerons toujours qu'elle est remplie et nous ne considérerons que les fonctions qui admettent une dérivée (fonctions <u>monogènes</u> de Cauchy.)

Récipr.^t – Si φ et ψ satisfont à ces conditions, et si de plus leurs dérivées premières sont continues, la fonction $f(z)$ admet une dérivée. ~~continue~~. ~~$f'(z) = \varphi'($~~ Pour le prouver

Nous allons former la différence :

$$\frac{\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y) + i[\psi(x+h, y+k) - \psi(x,y)]}{h+ik} - \varphi'_x - i\psi'_x$$

et montrer que si h, k tendent vers 0, cette différence tend aussi vers 0, c.à.d peut être rendue aussi petite que l'on veut.

Nous nous servirons de l'égalité : $\psi'_x = -\varphi'_y$

pour n'y faire figurer que les dérivées de φ.

Considérons la partie réelle du numérateur ~~de cette différence~~ :

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y) - h\varphi'_x - k\varphi'_y$$

Si φ est continue et admet une dérivée, on peut appliquer la formule de Taylor :

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y) = h\varphi'_x(x+\theta h, y+\theta k) + k\varphi'_y(x+\theta h, y+\theta k)$$

On a donc pour la partie réelle de la différence la fraction :

$$\frac{h[\varphi'_x(x+\theta h, y+\theta k) - \varphi'_x] + k[\varphi'_y(x+\theta h, y+\theta k) - \varphi'_y]}{h+ik}$$

Séparons les 2 termes : le module de $\frac{h}{h+ik}$ est $\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ qui est inférieur à 1 ; de même aussi $\left|\frac{k}{h+ik}\right| = \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} < 1$.
D'autre part les différences : $\varphi'_x(x+\theta h, y+\theta k) - \varphi'_x$,

$$\psi'_y(x+\theta h, y+\theta k) - \psi'_y$$

tendent vers 0 quand h et k tendent vers 0, donc la valeur absolue de la fraction peut être rendue aussi petite qu'on le veut.
On traitera de même la partie imaginaire de la différence.
Ainsi les conditions : $\varphi'_x = \psi'_y \qquad \varphi'_y = -\psi'_x$
sont nécessaires, et en y joignant la continuité de ces dérivées, suffisantes pour que la fonction $f(z)$ admette une dérivée.
— S'il y a des dérivées secondes, on aura les relations :

$$\varphi''_{x^2} = \psi''_{xy} \qquad \varphi''_{y^2} = -\psi''_{xy} \qquad \text{D'où :} \quad \varphi''_{x^2} + \varphi''_{y^2} = 0$$

$$\psi''_{x^2} = -\varphi''_{xy} \qquad \psi''_{y^2} = \varphi''_{xy} \qquad \text{———} \quad \psi''_{x^2} + \psi''_{y^2} = 0$$

ou ; $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0.$$

Ainsi aucune des 2 fonctions φ, ψ ne peut être prise arbitrairement.
Les relations précédentes engendrent les suivantes :

$$\varphi'_x\varphi'_y + \psi'_x\psi'_y = 0 \qquad \varphi'_x\psi'_x + \varphi'_y\psi'_y = 0.$$

Cette dernière relation montre que si l'on considère le faisceau de courbes dont l'équation générale est $\varphi(x,y) = a$,

et celui dont l'équation générale est : $\psi(x,y) = b$,
a et b étant des constantes réelles, les deux faisceaux sont orthogonaux. D'où cette propriété importante :

Toutes les fois qu'on a une fonction d'une variable imaginaire admettant une dérivée, on peut définir au moyen de cette fonction 2 faisceaux de courbes orthogonales.

Cette théorie est liée à d'autres propositions importantes. Ainsi, considérons le point qui a pour affixe

$$f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

Les coordonnées sont : $X = \varphi(x,y)$ $Y = \psi(x,y)$

Ces 2 équations définissent un certain mode de transformation des figures planes ; à chaque point (x,y) elles font correspondre un point (X,Y). Ce mode de transformation a la propriété de conserver les angles, c.à.d. que l'angle de 2 courbes du 1er système est égal à l'angle des 2 courbes correspondantes du 2e système. En effet, regardons x et y comme fonctions d'une même variable t, c.à.d. comme définissant une courbe dans le plan (x,y) : les coordonnées $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ définissent la courbe correspondante dans le plan (X,Y). Prenons les dérivées par rapport à t (en les marquant d'un accent) :

$$X' = \varphi'_x x' + \varphi'_y y' \qquad Y' = \psi'_x x' + \psi'_y y'$$

ou bien : $$X' = x'\varphi'_x - y'\psi'_x \qquad Y' = x'\psi'_x + y'\varphi'_x$$

Ces formules sont analogues aux formules de transformation des coordonnées rectangulaires. Posons :

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \cos\alpha \qquad \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \sin\alpha$$

α est l'angle que fait avec l'axe des x la tangente à la courbe au point considéré z. Posons de même :

$$\frac{X'}{\sqrt{X'^2+Y'^2}} = \cos\beta \qquad \frac{Y'}{\sqrt{X'^2+Y'^2}} = \sin\beta$$

β est l'angle que fait avec l'axe des X la tangente à la 2e courbe au point $f(z)$. Enfin posons :

$$\frac{\varphi'_x}{\sqrt{\varphi'^2_x+\psi'^2_x}} = \cos\theta \qquad \frac{\psi'_x}{\sqrt{\varphi'^2_x+\psi'^2_x}} = \sin\theta.$$

Les formules de transformation deviennent alors :

$$\sqrt{X'^2+Y'^2}\cos\beta = \sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{\varphi'^2_x+\psi'^2_x}\cos(\alpha+\theta)$$

$$\sqrt{X'^2+Y'^2}\sin\beta = \sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{\varphi'^2_x+\psi'^2_x}\sin(\alpha+\theta)$$

d'où l'on conclut

$$\beta = \alpha+\theta+2k\pi,$$

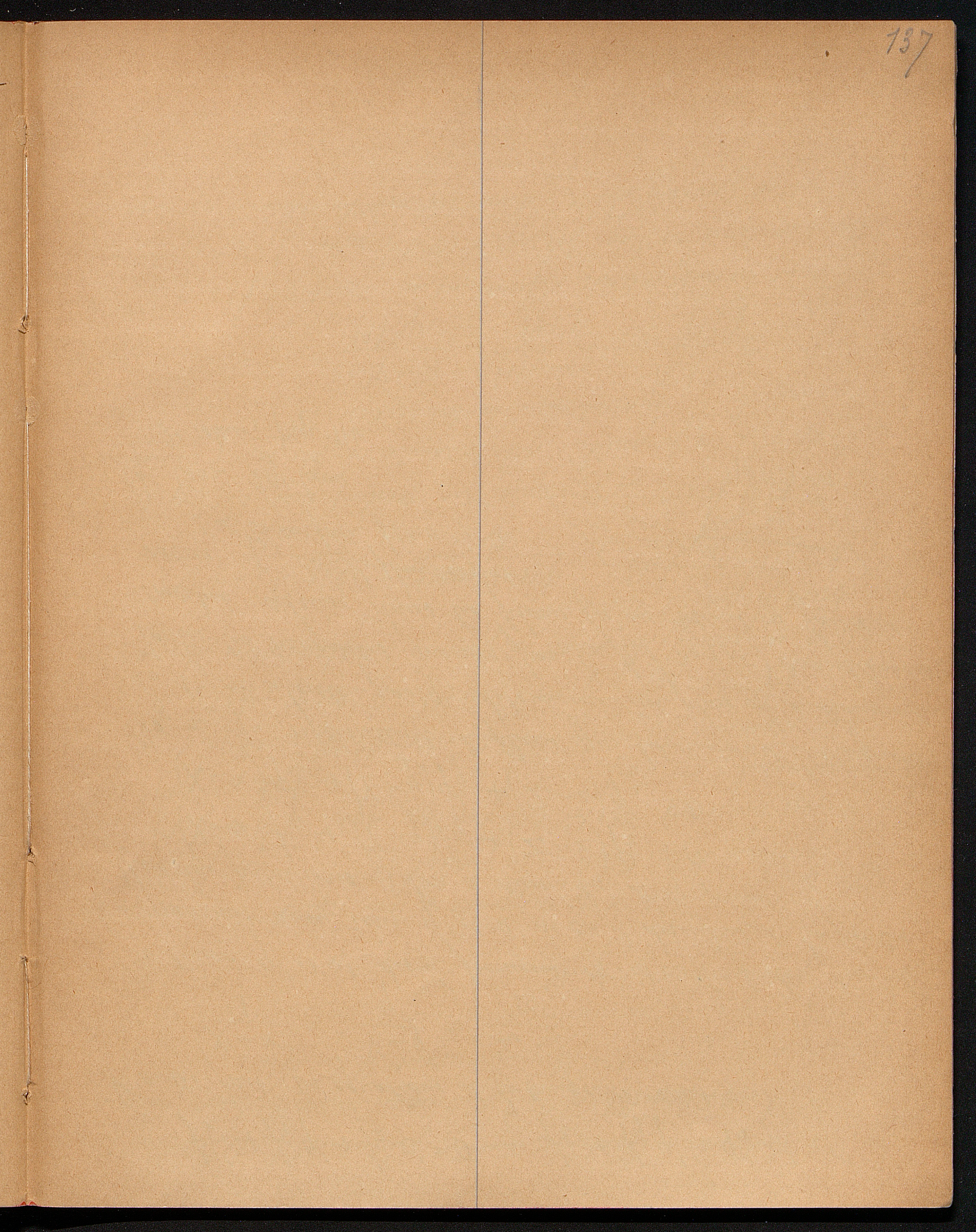
ce qui signifie : Considérant une portion de courbe ds le plan (x,y), correspondant à une certaine variation de t, l'angle α est l'angle de Ox avec la tangente à la courbe prise dans le sens où on fait varier t. Dans le plan (X,Y), β est l'angle de la tangente au p. correspondant de la courbe avec OX. On voit que l'angle β diffère de l'angle α d'un angle <u>fixe</u> θ,

c.q.f.d.

On démontre que dans le plan il n'y a pas d'autre méthode de transformation des figures permettant de conserver les angles si ce n'est celle qui consiste à prendre les figures symétriques par rapport à un axe; et encore ce procédé change-t-il la disposition relative des angles. — Ainsi toutes les fois qu'on aura une fonction d'une variable imaginaire admettant une dérivée, on aura un mode de transformation conforme c.à.d conservant les angles, de telle sorte que les figures correspondantes sont semblables dans leurs petites parties.

Exemples. Soit la formule de transformation: $Z_1 = z - a$, elle consiste à transporter la courbe parallèlement à elle-même, ou à transporter parallèlement les axes de manière que l'origine soit au point a.

La formule: $Z_1 = az$ donne une courbe homothétique à la 1e par rapport à l'origine, si a est réelle; il faut y joindre une rotation autour de O, si a est imaginaire.
La formule: $Z_1 = az + b$ donne une figure semblable à la 1e, et homothétique si a est réelle.
La formule: $Z_1 = \frac{a}{z}$, a étant réelle, donne la transformation par rayons vecteurs réciproques, à laquelle il faut joindre un retournement autour de Ox; car la transformation simple par rayons vecteurs change la disposition des angles.



$$\left\{ f'_x + f'_y y' + f'_z z' = 0 \qquad \varphi'_x + \varphi'_y y' + \varphi'_z z' = 0 \right.$$

D'autre part, les équations de la tangente sont :

$$\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}$$

On tirera y' et z' des 2 premières éq. et on les portera dans celles-ci.
On pourrait aussi tirer y' et z' de ces 2 dernières et les porter dans les premières. On a ainsi les 2 éq. :

$$(X-x) f'_x + (Y-y) f'_y + (Z-z) f'_z = 0$$
$$(X-x) \varphi'_x + (Y-y) \varphi'_y + (Z-z) \varphi'_z = 0$$

Ces 2 éq. représentent 2 plans qui déterminent la tangente.
La 1e, où n'entre pas φ, détermine un plan où se trouvent toutes les tangentes menées par le p. (x, y, z) aux diverses courbes situées dans les plans qu'on obtient en faisant varier φ, c.à.d. le plan tangent à la surface $f(x, y, z) = 0$.

cf. Cours, 29e leçon,
2e cahier, page 116.

Ces 2 dernières équations ~~sont 2~~ représentent 2 plans (l'un parallèle à Oz, l'autre parallèle à Ox) qui déterminent la droite par leur intersection (ce sont 2 plans projetants de la droite)

Si l'on a les paramètres directeurs a, b, c on aura les éq :

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

— Détermination de la tangente à une courbe. Soient les 3 équations de la courbe (en général) :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \varphi(t) \\ z = \psi(t) \end{cases}$$

prenons les points M, M' correspondant aux paramètres t et $t+h$ –

Les paramètres directeurs de la sécante MM' sont :

$$f(t+h)-f(t), \ \varphi(t+h)-\varphi(t), \ \psi(t+h)-\psi(t)$$

Si h est positif, ~~ils ne sont~~ on peut les remplacer sans changer la direction par les suivants :

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}, \ \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}, \ \frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}$$

Si h tend vers 0, les 3 paramètres tendent vers $f'(t), \varphi'(t), \psi'(t)$

Ce sont là les paramètres de la tangente en M pour t croissant.

On tire de là les équations de la tangente :

$$\frac{x-f(t)}{f'(t)} = \frac{y-\varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{z-\psi(t)}{\psi'(t)}$$

Soient les 2 équations définissant une courbe : $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ \varphi(x,y,z)=0 \end{cases}$

On résoudrait ces 2 éq. par rapp à z et y qu'on aurait en fonction de x, et on tirerait les dérivées par rapp à x :

l'intersection de la parallèle à Oz dont les coordonnées sont x et y avec la surface considérée.

Deux surfaces se coupant suivant une courbe, deux éq. à 3 inconnues définissent une courbe : $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ \Phi(x,y,z)=0 \end{cases}$

Si l'on élimine z, on a l'équation à 2 inconnues :

$$R(x,y)=0$$

qui doit être satisfaite par les mêmes valeurs de x et de y que le système précédent ; elle représente donc la projection de la courbe sur le plan x, y (ou encore la surface cylindrique parallèle à Oz dont cette projection est la trace)

On aurait de même les projections de la courbe sur les plans xz, xy en éliminant y, z du système des 2 éq.

— Il est aisé de montrer qu'un plan est déterminé par une équation du 1er degré en x, y, z.

Par conséquent, une droite sera déterminée par 2 équations semblables.

Soit sur une droite quelconque un point fixe A ayant pour coordonnées x_0, y_0, z_0. Soit un p. M mobile sur cette droite, ayant pour coordonnées x, y, z. M serait déterminé par la mesure du segment $AM = l$. Soient α, β, γ les angles que la droite fait avec les 3 ~~ax~~ axes, on a :

$$\begin{cases} x - x_0 = l \cos\alpha \\ y - y_0 = l \cos\beta \\ z - z_0 = l \cos\gamma \end{cases} \qquad \frac{x-x_0}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0}{\cos\beta} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma}$$

Si AB partait de O dans la même direction, ses projections seraient égales aux précédentes. Ses paramètres directeurs sont donc :

$$x'-x \quad , \quad y'-y, \quad z'-z, \quad \text{et ses cosinus directeurs :}$$

$$\frac{x'-x}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}, \frac{y'-y}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}, \frac{z'-z}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}$$

— Pour représenter une ligne quelconque dans l'espace, il suffit d'avoir l'équation d'un quelconque de ses points en fonction d'un paramètre variable. Quand le paramètre varie, le point décrit la ~~c~~ courbe, qui peut être considérée comme son lieu. — Soit le système de 3 éq. définissant un point en fonction de t, c.à.d. une courbe pour t variable

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \varphi(t) \\ z = \psi(t) \end{cases}$$

Ces équations prises deux à deux définissent les projections de la courbe sur les 3 plans.

Si l'on prend x pour paramètre, on a les 2 équations :

$$\left\{ y = \varphi_1(x) \qquad z = \psi_1(x) \right.$$

L'équation $y = \varphi_1(x)$ représente une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z ; de même l'éq. $z = \psi_1(x)$ représente une surface cylindrique parallèle à l'axe des y. La courbe que définissent ces 2 éq. peut donc être considérée comme l'intersection de 2 cylindres.

— On peut mettre l'éq. d'une surface sous la forme générale :

$$F(x, y, z) = 0$$

En effet, pour chaque système (x, y) z est déterminé par

On peut aisément déduire les cosinus directeurs des paramètres directeurs. Soit $OM = l$, soient α, β, γ les angles de OM avec les 3 axes ; $x = l \cos\alpha$ $\quad y = l\cos\beta$ $\quad z = l \cos\gamma$

Ces 3 éq. jointes à l'égalité connue : $x^2+y^2+z^2 = l^2$ donnent les 3 cosinus en fonction de x, y, z.

Autre méthode : On appelle contour des coordonnées la ligne brisée $OQPM$, qui comprend les 3 coordonnées bout à bout et dans des directions orthogonales. Si on projette cette ligne sur OM, on a, quelles que soient les positions respectives :

$$\overline{OM} = \overline{OQ'} + \overline{P'Q'} + \overline{P'M}$$ (P', Q' étant les proj. de P, Q sur OM.

c.à.d. $\quad l = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$

si l'on y remplace les cosinus par leurs valeurs respectives :

$$\cos\alpha = \frac{x}{l} \qquad \cos\beta = \frac{y}{l} \qquad \cos\gamma = \frac{z}{l}$$

on obtient encore l'égalité : $\quad l^2 = x^2+y^2+z^2$

donc : $\quad \cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Considérons un segment quelconque AB, les coordonnées de A étant x, y, z, celles de B x', y', z'. Pour avoir les paramètres directeurs de AB, on projette AB sur Ox en $A'B'$, sur Oy en $A''B''$, sur Oz en $A'''B'''$. On a les identités ;

$OB' = OA' + A'B'$ $\qquad$ ou : $\qquad A'B' = x'-x$

$OB'' = OA'' + A''B''$ $\qquad\qquad A''B'' = y'-y$

$OB''' = OA''' + A'''B'''$ $\qquad\qquad A'''B''' = z'-z$

pour avoir M sur la perp. en P au plan, il suffira de donner PM en longueur et en direction; on conviendra d'affecter les projetantes du signe + ou du signe − selon qu'elles seront d'un côté ou de l'autre du plan de projection.

On peut aussi prendre une direction Oz perp. au plan, et qu'on regardera comme positive dans le sens Oz; si l'on mène par P un pl. parallèle au pl. de projection, c.à.d. perp. à Oz, soit M' le point de rencontre de ce pl. avec Oz, OM' est équipollent avec PM; on peut donc l'y substituer.

Soient OQ et QR ou OR les coordonnées de P dans le plan xOy: on voit que OQ, OR, OM' sont les projections orthogonales de OM sur Ox, Oy, Oz. — On peut donc définir un p. de l'espace par ses 3 projections orthogonales sur 3 ~~plans~~ axes formant un trièdre trirectangle, ou par ses 3 projetantes sur les faces de ce trièdre.
— On voit que OM est la diagonale d'un parallélipipède rectangle dont ses coordonnées constituent les 3 arêtes.
— Pour déterminer une direction dans l'espace on mène par O une parallèle à cette direction: on prend sur cette parallèle un p. M quelconque; les coordonnées du p. M sont les <u>paramètres directeurs</u> de la direction. Si on prend M' tel que OM' soit égal à l'unité de longueur, les paramètres deviennent les <u>cosinus directeurs</u> de la direction.

De l'égalité précédente on tire :

$$\overline{P'C'} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PQ}} \times \overline{P'Q'} \qquad \text{or} \quad \frac{PC}{PQ} = a \ , \quad \overline{P'Q'} = \alpha .$$

Donc : $\overline{P'C'} = a\alpha = A'B'$.

Les projections de deux segments équipollents sur un même axe sont égales.

Dans le cas des projections orthogonales, soient Ox, Oy les deux axes ; prenons sur Oy une longueur PQ égale à l'unité ; projetons-la sur une parallèle à Ox menée par P ; la projection PR est le cosinus de l'angle des 2 directions positives.

Quand on a un axe quelconque et des points A, B, C sur cet axe, si l'on désigne par $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ les nombres qui mesurent les segments AB, AC, BC, on aura dans tous les cas

$$AB = AC + CB \qquad \text{ou} \qquad AC + CB + BA = 0 .$$

– Dans un plan on détermine un p. M par 2 coordonnées rectangulaires qui sont les projections du segment OM sur les 2 axes.

Pour déterminer un p. M dans l'espace, on mène un plan quelconque avec 2 axes ; on projette M sur ce plan en P ; P est déterminé par ses 2 coordonnées dans le plan ;

Considérons un axe Ox et un plan P non parallèle à Ox ; on appelle projection d'un segment AB sur Ox le segment $A'B'$ déterminé sur Ox par les projections des points A, B parallèlement au plan P.

Dans le cas particulier où le pl P est perp. à l'axe Ox, les projections sont orthogonales.

Soit un second axe O_1y. Posons :

$$AB = a. \quad (AB \text{ parall. à } O_1y)$$

Soit $A'B'$ la projection de AB sur Ox ; soit α la projection sur Ox d'un segment PQ égal à l'unité de longueur et porté sur O_1y dans le sens positif : on a :

$$A'B' = a \times \alpha.$$

Supposons que AB soit remplacé par sa projection PC sur O_1y : AB et PC sont des segments équipollents.

Les points P, Q, C se projettent sur Ox en P', Q', C'. On a entre les longueurs géométriques la relation :

$$\frac{\overline{P'C'}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PQ}}$$

Il est facile de prouver que cette égalité subsiste quand on affecte ces longueurs de signes. – En effet, si PQ et PC sont de même signe, C et Q seront d'un même côté par rapp. à P, de même leurs plans projetants seront du même côté du pl. projetant P, et C', Q' seront du même côté de P' sur Ox ; de même pour les autres cas.

Eléments de géométrie analytique

Il faut d'abord définir une notion fondamentale, celle du <u>segment de droite</u>, considéré comme élément. En géométrie analytique, un segment est déterminé par ses 2 points extrêmes, mais de telle sorte que l'un soit l'origine et l'autre l'extrémité : de sorte que toute droite géométrique finie représente en analytique 2 segments égaux, mais de sens contraire.

On appelle <u>segments équipollents</u> des segments égaux, parallèles et de même sens.

Tous les segments parallèles à une direction Ox ont pour <u>mesure</u> le nombre qui représente leur longueur, affecté du signe + ou du signe − selon que leur sens est identique ou inverse de celui de la direction Ox.

Si les 2 extrémités d'un segment coïncident, sa longueur est 0.

Si $\overline{AB}$ est la longueur géométrique du segment AB, $+\overline{AB}$ est la mesure de AB, $-\overline{AB}$ la mesure de BA.

Si α est un nombre positif ou négatif $\alpha\overline{AB}$ mesurera un segment AB' qui sera porté sur la même droite que AB ; admettons que leur origine commune soit A. Le rapp. des 2 longueurs AB', AB sera la valeur absolue de α, et son signe dépendra du sens de AB' par rapport à AB.

<u>Deux segments équipollents ont évidemment même mesure.</u>